Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 5, No 1, 2015, September
ISSN 2222-5498

О смешанных задачах для волнового уравнения, содержащих в граничных условиях производные по времени

Р.Т. Зульфугарова

Аннотация. В работе для волнового уравнения рассмотрены две смешанные задачи, на одном из которых в краевых условиях содержатся производные по времени третьего порядка, а на втором - производные второго порядка. Найдены явные представления этих задач, выраженных в виде полного интегрального вычета от решений соответствующих спектральных задач и задач Коши.

Key Words and Phrases: волновое уравнение, смешанные задачи, вычеты, собственные значения, функция Грина.

2000 Mathematics Subject Classifications: 35L20, 47F05, 58J50

Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(0,t) + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 0, \quad u_{xx}(0,t) - u_{xx}(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi_1(x). \tag{3}$$

К решению смешанной задачи (1)-(3) удается применить вычетный метод [1]. По общей схеме вычетного метода рассматриваемой смешанной задаче сопоставляется сначала две задачи с комплексным параметром λ:

1. Спектральная задача нахождения решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^2 y = \lambda \Phi_0(x) + \Phi_1(x) \tag{4}$$

при граничных условиях

$$
\begin{aligned}
&L_1(y) = y(0) + \lambda y''(0) = \Phi_0''(0), \\
&L_2(y) = y''(0) - y''(1) = 0;
\end{aligned} \tag{5}
$$

2. Задача Коши нахождения решения уравнения

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \lambda^2 z = 0, \;\; t \in [0, T], \tag{6}
$$

при начальных условиях

$$
\left. \frac{\partial^2 z}{\partial t^k} \right|_{5=0} = \Phi_k(x), \quad k = 0, 1, \quad 0 < x < 1. \tag{7}
$$

Для всех λ таких, что $\Delta(\lambda) \neq 0$ (выражение для $\Delta(\lambda)$ записано ниже) задача (4),(5) имеет единственное решение $y(x, \lambda)$, определяемое формулой

$$
y(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) + y_2(x, \lambda), \tag{8}
$$

где $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$, соответственно, являются решениями следующих задач:

$$
\frac{d^2 y_1}{dx^2} - \lambda^2 y_1 = 0, \tag{9}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_1(0) + \lambda y_1''(0) = \Phi_0''(0), \\
&y_1''(0) - y_1''(1) = 0;
\end{aligned}
\right\} \tag{10}
$$

$$
\frac{d^2 y_2}{dx^2} - \lambda^2 y_2 = \lambda \Phi_0(x) + \Phi_1(x), \tag{11}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_2(0) + \lambda y_2''(0) = 0, \\
&y_2''(0) - y_2''(1) = 0,
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

а

$$
\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda^3 & 1 + \lambda^3 \\ \lambda^2 - \lambda^2 e^{\lambda} & \lambda^2 - \lambda^2 e^{-\lambda} \end{vmatrix} = \lambda^2 \left(\lambda^3 + 1 \right) \left[e^{\lambda} - e^{-\lambda} \right].
$$

Общее решение уравнения (9) представляется в виде

$$
y_1 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}. \tag{13}
$$

Учитывая краевые условия (10), находим, что

$$
c_1 = \frac{\left[1 - e^{-\lambda}\right]}{\Delta \lambda} \lambda^2 \Phi_0''(0), \quad c_2 = \frac{\left[1 - e^{\lambda}\right]}{\Delta \lambda} \lambda^2 \Phi_0''(0) \tag{14}
$$

и для $y_1(x, \lambda)$ имеем

$$y_1(x,\lambda)=\frac{2\Phi_0''(0)\left[sh\lambda(1-x)+sh\lambda x\right]\lambda^2}{(\Delta\lambda)}. \tag{15}$$

Рассматривая (11),(12), как краевую задачу для неоднородного уравнения с однородными краевыми условиями, после несложных преобразований находим следующее представление для решений $y(x,\lambda)$:

$$y(x,\lambda)=\frac{2\lambda^2\Phi_0''(0)\left[sh\lambda(1-x)+sh\lambda x\right]}{\Delta(\lambda)}+\int_0^1\frac{\Delta\left(x,\xi,\lambda\right)}{\Delta(\lambda)}\left[\lambda\Phi_0(\xi)+\Phi_1(\xi)\right]d\xi, \tag{16}$$

где $\Delta(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & e^{\lambda x} & e^{-\lambda x}\\ L_1(g)_x & \vdots & \cdots\\ L_2(g)_x & \vdots & \Delta(\lambda)\end{vmatrix}$,

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2}\left[e^{-\lambda(x-\xi)}-e^{\lambda(x-\xi)}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), \tag{17}$$

$$L_1(g)_x=g(0,\xi,\lambda)+\lambda g''(0,\xi,\lambda)=\tfrac{1}{4\lambda}\left[e^{\lambda\xi}-e^{-\lambda\xi}\right]+\tfrac{\lambda^2}{4}\left[e^{\lambda\xi}-e^{-\lambda\xi}\right]=$$
$$=\tfrac{1}{2\lambda}sh\lambda\xi+\tfrac{\lambda^2}{2}sh\lambda\xi,$$

$$L_2(g)_x=g''(0,\xi,\lambda)-g''(1,\xi,\lambda)=\tfrac{\lambda}{4}\left[e^{\lambda\xi}-e^{-\lambda\xi}\right]+\tfrac{\lambda}{4}\left[e^{-\lambda(1-\xi)}-e^{\lambda(1-\xi)}\right]=$$
$$=\tfrac{\lambda}{2}sh\lambda\xi-\tfrac{\lambda}{2}sh\lambda(1-\xi),$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=g(x,\xi,\lambda)\Delta(\lambda)-\left[\tfrac{1}{2\lambda}sh\lambda\xi+\tfrac{\lambda^2}{4}sh\lambda\xi\right]\left[2\lambda^2sh\lambda x+2\lambda^2sh\lambda(1-x)\right]+$$
$$+\left[\tfrac{\lambda}{2}sh\lambda\xi-\tfrac{\lambda}{2}sh\lambda(1-\xi)\right]\left[2sh\lambda x+2\lambda^3sh\lambda x)\right]=g\left(x,\xi,\lambda\right)\Delta(\lambda)-$$
$$-\lambda^2\left[\tfrac{1}{\lambda}sh\lambda\xi+\lambda^2sh\lambda\xi)\right]\left[sh\lambda x+sh\lambda(1-x)\right]+\lambda\left[sh\lambda\xi-sh\lambda(1-\xi)\right]\left[sh\lambda x+\lambda^3sh\lambda x\right],$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\tfrac{-sh\lambda\xi(\lambda^3+1)[sh\lambda x+sh\lambda(1-x)]\cdot\lambda+\lambda[sh\lambda\xi-sh\lambda(1-\xi)]\left(1+\lambda^3\right)sh\lambda x}{\lambda^2(1+\lambda^3)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}=\\&=\tfrac{-sh\lambda\xi[sh\lambda x+sh\lambda(1-x)]+[sh\lambda\xi-sh\lambda(1-\xi)]sh\lambda x}{\lambda(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}.\end{aligned} \tag{18}$$

Корнями уравнения $e^{\lambda}-e^{-\lambda}=0$ являются $\lambda_k=k\pi i;\ \ k=0,1,2,\cdots$, и они будут собственными значениями задачи.

Согласно работе [1] решение смешанной задачи (1)-(3) представляется в виде полного интегрального вычета

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_V\int_{C_V}\lambda d\lambda\int_0^1\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}z(t,\lambda,\xi)d\xi, \tag{19}$$

где $z(t,\lambda,\xi)$ - решение задачи Коши (6), (7) и явный вид этого решения будет: $z(t,\lambda,\xi)=\Phi_0(\xi)ch\lambda t+\frac{1}{\lambda}\Phi_1(\xi)sh\lambda t$, а C_V-достаточно малые круги с центром в собственных значениях.

Запишем

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)$$

и предположим, что $\Phi_i(x)=\Phi_i, \quad i=0,1$, постоянные. Тогда

$$u_1(x,t)=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^1\left[\frac{-2i\ \sin k\pi\xi[2i\ \sin k\pi x+2i\ \sin k\pi(1-x)]}{2\cdot(-1)^k}+\frac{[2i\ \sin k\pi\xi-2i\ \sin k\pi(1-\xi)]i\ \sin k\pi x}{2\cdot(-1)^k}\right]\times$$
$$\times\Phi_0\ \cos k\pi t d\xi,$$

$$\int_0^1 \sin\ k\pi\xi d\xi=-\frac{1}{k\pi}\left[(-1)^k-1\right],\ \int_0^1 \sin\ k\pi(1-\xi)d\xi=\frac{1}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right]$$

и

$$u_1(x,t)=$$
$$=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^1\left\{\frac{-\left[(-1)^k-1\right][\sin k\pi x+\sin k\pi(1-x)]+\left[1-(-1)^k+(-1)^k-1\right]\sin k\pi x}{2k\pi\cdot(-1)^k}\right\}\cdot\Phi_0\times$$
$$\times\cos k\pi t=-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{-\left[(-1)^k-1\right]\left[\sin k\pi x-(-1)^k\sin\pi x\right]}{2k\pi(-1)^k}\cdot\Phi_0\cdot\ \cos k\pi t=$$
$$=-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\left[(-1)^k-1\right]^2\sin k\pi x}{k\pi}\cdot\Phi_0\cdot\ \cos k\pi t.$$

Непосредственным вычислением для $u_2(x,t)$ имеем:

$$u_2(x,t)=$$
$$=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{-\left[(-1)^k-1\right][\sin k\pi x+\sin k\pi(1-x)]+\left[1-(-1)^k+(-1)^k-1\right]\sin k\pi x}{2k\pi\cdot(-1)^k}\right\}\cdot\frac{\Phi_1}{k\pi}\sin k\pi t=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\left[(-1)^k-1\right]\left[\sin k\pi x-(-1)^k\sin\pi x\right]}{2k\pi(-1)^k}\cdot\Phi_0\cdot\ \cos k\pi t=$$
$$=-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\left[(-1)^k-1\right]\sin k\pi x}{(k\pi)^2}\cdot\Phi_1\cdot\sin k\pi x\cdot\sin k\pi t.$$

А для $u_3(x,t)$ имеем:

$$u_3(x,t)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_V}\lambda d\lambda\int_0^1\frac{2\lambda^2\Phi_0''(0)[sh\lambda(1-x)+sh\lambda x]}{\Delta\lambda}\cdot z(t,\lambda,\xi)d\xi=0,$$

поскольку

$$\frac{2\lambda^2\Phi_0''(0)[sh\lambda(1-x)+sh\lambda x]}{\Delta(\lambda)}=$$
$$=\frac{\Phi_0''(0)e^{-\lambda(1-x)}\left[1-e^{-\lambda}\right]}{(\lambda^3+1)\left[1-e^{-2\lambda}\right]}+\frac{\Phi_0''(0)e^{-\lambda x}\left[e^{-\lambda}-1\right]}{(\lambda^3+1)\left[1-e^{-2\lambda}\right]}=O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right),$$

и для этого выражения формула разложения [2, 3] равна нулю. В результате, получается явное представление решения

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\left[(-1)^k-1\right]}{k\pi}\cdot\left[\Phi_0\cos k\pi t+\frac{1}{k\pi}\Phi_1\sin k\pi t\right]\sin k\pi x. \tag{20}$$

Теперь для уравнения (1) рассмотрим следующие начальные краевые условия:

$$u|_{t=0}=\alpha x,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=1}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0.$$

Тогда подобные задача Коши и спектральная задача будут:

$$\frac{d^2z}{dt^2}-\lambda^2 z=0,\quad z|_{t=0}=\alpha x,\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda^2 y=\lambda\alpha x,$$

$$y(0)=0,\quad \left.\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right|_{x=1}+y'(1)=0.$$

В этом случае,

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda^2e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda} & \lambda^2e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\end{vmatrix}=\lambda^2e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\lambda^2e^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}=$$
$$=\lambda\left[(\lambda-1)e^{-\lambda}-(\lambda+1)e^{\lambda}\right]=-2\lambda\left[sh\lambda-ch\lambda\right],$$

$$\lambda^2e^{\lambda}\Delta(\lambda)=\left[-\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)e^{2\lambda}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]\cong\left[-e^{-2\lambda}+1\right].$$

Достаточно далекие нули при $Re\lambda\le 0$ будут $\lambda_i=k\pi i;\quad k=0,\pm1,\pm2,\ \cdots.$
При больших λ, $\left|\lambda^2e^{\lambda}\Delta(\lambda)\right|\ge 1$:

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2}\left(e^{-\lambda(x-\xi)}-e^{\lambda(x-\xi)}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\lambda}\right),$$

$$L_1(g)_x=\frac{1}{2\lambda}sh\lambda\xi,\quad L_2(g)_x=\frac{1}{2}ch\lambda(1-\xi)+\frac{\lambda}{2}sh\lambda(1-\xi),$$

$$\begin{aligned}&\Delta(x,\xi,\lambda)=\\&\pm\tfrac{1}{2}\left(e^{-\lambda(x-\xi)}-e^{\lambda(x-\xi)}\right)\cdot\tfrac{1}{(-2\lambda)}\Delta(\lambda)-\\&-\tfrac{sh\lambda\xi}{2\lambda}\left[\lambda^2e^{-\lambda(1-x)}-\lambda e^{-\lambda(1-x)}-\lambda^2e^{-\lambda(1-x)}-\lambda e^{\lambda(1-x)}\right]+\\&+\left[\tfrac{1}{2}ch\lambda(1-\xi)+\tfrac{\lambda}{2}sh(1-\xi)\right]\left[e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}\right],\end{aligned}$$

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=$$

$$=\frac{sh\lambda\xi\left[\lambda sh\lambda(1-x)+ch\lambda(1-x)\right]+\left[ch\lambda(1-\xi)+\lambda sh\lambda(1-x)\right]}{\lambda\left[(\lambda-1)e^{-\lambda}-(\lambda+1)e^{\lambda}\right]}\cdot sh\lambda x.$$

Для решения задачи Коши имеем

$$z(x,t,\lambda) = \alpha x ch\lambda t.$$

Окончательно для $u(x,t)$ получаем:

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_V \int_{C_V} \lambda d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) z(t,\lambda,\xi) d\xi = \\
&= -\sum_{V=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{sh\lambda_V \xi[\lambda_V sh\lambda_V(1-x)+ch\lambda_V(1-x)]+[ch\lambda_V(1-\xi)+\lambda_V sh\lambda_V(1-\xi)]sh\lambda_V x}{-2[2sh\lambda_V+\lambda_V ch\lambda_V]} \times \alpha x \operatorname{ch}\lambda_V t d\xi \\
&= -\sum_{V=-\infty}^{1} \int_0^1 \left\{ \frac{sh\lambda_V \xi[\lambda_V sh\lambda_V(1-x)+ch\lambda_V(1-x)]+[ch\lambda_V(1-\xi)+\lambda_V sh\lambda_V(1-\xi)]sh\lambda_V x}{-2[2sh\lambda_V+\lambda_V ch\lambda_V]} \right\} \times \\
&\times \alpha x \operatorname{ch}\lambda_V t d\xi - \sum_{V=1}^{\infty} \int_0^1 \left\{ \frac{sh\lambda_V \xi[\lambda_V sh\lambda_V(1-x)+ch\lambda_V(1-x)]+[ch\lambda_V(1-\xi)+\lambda_V sh\lambda_V(1-\xi)]sh\lambda_V x}{-2[2sh\lambda_V+\lambda_V ch\lambda_V]} \right\} \times \\
&\times \alpha x \operatorname{ch}\lambda_V t d\xi,
\end{aligned}$$

где λ_V являются корнями уравнения $\lambda sh\lambda - ch\lambda = 0$.

Список литературы

[1] Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку, Элм, 1989.

[2] Расулов М.Л. Формула разложения в случае спектральной задачи, содержащей в граничных условиях производные более высоких порядков, чем в уравнении. Дифференциальные уравнения, 1982, т. 18, No 12, с. 2149-2166.

[3] Мамедова Л.М. Классическое решение смешанной задачи для уравнения колебания стержня, содержащая в граничных условиях производные по времени. Ümummilli Lider Heyder Eliyevin anadan olmasının 85-ci ildönümüne hesr olunmus "Riyaziyyat, informatika ve iqtisadiyyatın müasir problemleri" mövzusunda respublika elmi konfransının materialları, Bakı – 2008, s. 67-73.

Р.Т. Зульфугарова
Бакинский Государственный Университет,
Ул. З. Халилова, 23, Баку, Азербайджан
E-mail: renazulfugarova94@gmail.com

Received 05 March 2015
Accepted 11 May 2015