Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 5, No 1, 2015, September
ISSN 2222-5498

Разложение по собственным функциям дифференциального оператора четвертого порядка с растущим потенциалом

А. Х. Азимов, Э. Х. Эйвазов*

Аннотация. В работе исследуются компактность резольвенты, дискретность спектра, полнота собственных функций и разложение по собственным функциям дифференциального оператора четвертого порядка с растущим потенциалом.

Key Words and Phrases: компактный оператор, дискретный спектр, резольвента, полнота, разложение по собственным функциям.

2000 Mathematics Subject Classifications: 35J30, 35P05, 35P10, 47A10

1. Введение

Рассмотрим в R_n дифференциальное выражение

$$\ell_q = \sum_{|\alpha|=1}^{4} a_\alpha D^\alpha + q\left(x\right),$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_n$, $q\left(x\right)$- вещественная измеримая функция, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ - мультииндекс, т.е. его компоненты α_j - целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

a_α - вещественное число, если $|\alpha|$ - четное, чисто мнимое, если $|\alpha|$ - нечетное.

Определение. *Пусть* $F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \equiv F\left(x\right)$ *измеримая функция в смысле Лебега в пространстве* R_n. *Если для любого положительного числа* M *существует положительное число* R_M *такое, что во множестве* $\{x : |x| > R_M\}$ *почти везде выполняется неравенство* $F\left(x\right) \geq M$, *то говорят, что* $F\left(x\right) \to +\infty$ *при* $x \to \infty$, *где* $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

*Corresponding author.

 © 2011 JCAM All rights reserved.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$a)\quad q(x) \in L_{2,loc}(R_n);$$

$$b)\quad \lim_{x\to\infty} q(x) = +\infty;$$

$c)$ для любого $p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in R_n$, $G(p) := \sum_{|\alpha|=1}^{4} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha p^\alpha \geq 0$;

$d)$ $\lim\limits_{|p|\to+\infty} \mathrm{G}(p) = +\infty$, где $p^\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ и $|p| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k^2}$.

Введем оператор $\tilde{H}_q : L_2(R_n) \to L_2(R_n)$ по формуле $\tilde{H}_q u = l_q u$ с областью определения $D\left(\tilde{H}_q\right) = C_0^\infty(R_n)$ ($C_0^\infty(R_n)$ - совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых в R_n функций). Если $q(x) = 0$, то обозначим $\tilde{H}_q$ через $\tilde{H}_0$. Замыкания операторов $\tilde{H}_q$ и $\tilde{H}_0$ обозначим через H_q и H_0, соответственно.

Цель данной статьи - при условиях $a)$-$d)$ доказать дискретность спектра самосопряженного оператора H_q и получить разложение по его собственным функциям произвольной функции из пространства $L_2(R_n)$.

Отметим, что самосопряженность оператора H_q получается из теоремы о самосопряженности дифференциальных операторов любого порядка, которая установлена в работе [14].

В настоящее время имеется много работ по исследованию характера спектра дифференциальных операторов любого порядка (см., например, [1], [5], [6], [9], [15-18]). Дискретный спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и описывает важные характеристики физических и химических объектов (квадраты частот собственных колебаний механических систем, энергетические уровни квантовых объектов и т.п.). Особый интерес представляет задача управления дискретным спектром дифференциальных операторов (см., например, [3]). Исследование многих задач математической физики и квантовой механики связано с разложениями в ряды по собственным функциям дифференциальных операторов (см., например, [7], [10], [13]).

В связи с многочисленными приложениями дифференциальных операторов четвертого порядка (см., например, [12]) исследование дискретности спектра этих операторов носит важный характер.

2. О вполне непрерывности резольвенты оператора H_q

В условиях $a)$-$d)$ оператор H_q полуограничен снизу. Поэтому, не теряя общности, будем считать, что H_q является положительным оператором.

Обозначим через $N(\lambda)$ размерность собственного подпространства оператора H_q, соответствующего собственному значению λ, а через $\sigma_\infty(L_2(R_n))$ пространство вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_2(R_n)$. Справедлива следующая

Лемма 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\sup\{\lambda \in (-\infty,+\infty):\ N(\lambda) < +\infty\} = +\infty$*;*
(ii) *спектр оператора H_q состоит только из изолированных конечнократных собственных значений;*
(iii) *для некоторого $\mu \in \rho(H_q)$, $(H_q - \mu I)^{-1} \in \sigma_\infty(L_2(R_n))$, где $\rho(H_q)$- резольвентное множество оператора H_q;*
(iv) *для любого $\lambda \in \rho(H_q)$, $(H_q - \lambda I)^{-1} \in \sigma_\infty(L_2(R_n))$;*
(v) *для некоторого $s > 0$, $e^{-sH_q} \in \sigma_\infty(L_2(R_n))$;*
(vi) *для любого $t > 0$, $e^{-tH_q} \in \sigma_\infty(L_2(R_n))$.*

Доказательство. Для доказательства эквивалентности пунктов (i) и (ii) см. [1] или [11]. Импликации (iv) $\Rightarrow$(iii) и (vi) $\Rightarrow$(v) тривиальны. Обратная импликация (iii) $\Rightarrow$ (iv) вытекает из резольвентного тождества Гильберта (см., например, [2])

$$(H_q - \lambda I)^{-1} = (H_q - \mu I)^{-1} + (\lambda - \mu)(H_q - \lambda I)^{-1}(H_q - \mu I)^{-1}. \tag{1}$$

Действительно, поскольку оператор $(H_q - \lambda I)^{-1}$ ограничен, а $(H_q - \mu I)^{-1}$ компактен, то $(H_q - \lambda I)^{-1}(H_q - \mu I)^{-1}$ компактен. Так как пространство $\sigma_\infty(L_2(R_n))$ является идеалом, то из формулы (1) следует, что оператор $(H_q - \lambda I)^{-1}$ компактен. Импликация (v) $\Rightarrow$(vi) легко выводится из тождества

$$e^{-tH_q} = e^{-(t-s)H_q}e^{-sH_q}.$$

Лемма доказана.

Для исследования резольвенты оператора H_q мы предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия a)-d). Тогда для любого положительного числа b множество*

$$F_{H_q} = \left\{\psi \in Q(H_q):\ \int_{R_n} |\psi(x)|^2\,dx \le 1,\ (H_q\psi,\psi) \le b\right\}$$

компактно, где $Q(H_q)$ - область определения формы, порожденной оператором H_q.

Доказательство. Краткое доказательство этой леммы приведено в работе [14]. Здесь для полноты излагаем подробное доказательство этой леммы. Из условий a)-b) следует, что функция $q(x)$ ограничена снизу. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что $q(x) \ge 0$. С другой стороны, из условий c)-d) следует, что H_0 является самосопряженным и неотрицательным оператором. Легко видеть, что из неравенства $(H_q\psi,\psi) \le b$ вытекают неравенства

$$(q(x)\psi,\psi) = \int_{R_n} q(x)|\psi(x)|^2\,dx \le b$$

и

$$(H_0\psi,\psi) = \left(\sum_{|\alpha|=1}^{4} a_\alpha D^\alpha\psi,\psi\right) \le b. \tag{2}$$

Обозначим через

$$\tilde{\psi}(p) = F[\psi(x_1, x_2, ..., x_n)](p) = \int_{R_n} \psi(x_1, x_2, ..., x_n)\, e^{i(p,x)} dx_1 dx_2 ... dx_n$$

преобразование Фурье функции $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $i = \sqrt{-1}$, $(p, x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$.

Используя теорему Планшереля и формулу $F[1](p) = (2\pi)^n \delta(p)$ ($\delta(p)$-функция Дирака) (см., например, [4], с. 103), имеем:

$$\int_{R_n} \tilde{\psi}(p)\, \overline{\tilde{\varphi}(p)} dp = \int_{R_n} \left\{ \int_{R_n} \psi(x)\, e^{i(p,x)} dx \right\} \overline{\left\{ \int_{R_n} \varphi(y)\, e^{i(p,y)} dy \right\}} \tilde{\psi}(p)\, dp =$$

$$= \int_{R_n} \int_{R_n} \left\{ \int_{R_n} e^{i(p,x)} e^{-i(p,y)} dp \right\} \psi(x)\, \overline{\varphi(y)} dx dy =$$

$$= \int_{R_n} \int_{R_n} \left\{ \int_{R_n} e^{i(p,x-y)} dp \right\} \psi(x)\, \overline{\varphi(y)} dx dy =$$

$$= \int_{R_n} \int_{R_n} (2\pi)^n \delta(x-y)\, \psi(x)\, \overline{\varphi(y)} dx dy =$$

$$= (2\pi)^n \int_{R_n} \int_{R_n} \psi(x)\, \overline{\varphi(x)} dx. \tag{3}$$

Используя равенство (3), получим:

$$(H_0 \psi, \psi) = \left(\sum_{|\alpha|=1}^{4} a_\alpha D^\alpha \psi, \psi \right) = (2\pi)^n \int_{R_n} G(p) \left| \tilde{\psi}(p) \right|^2 dp. \tag{4}$$

Если учесть равенство (4) в неравенстве (2), то получим

$$\int_{R_n} \left(\sum_{|\alpha|=1}^{4} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha p^\alpha \right) \left| \tilde{\psi}(p) \right|^2 dp \le \tilde{b}, \tag{5}$$

где $\tilde{b} = \frac{b}{(2\pi)^n}$. Используя неравенство (5) и $\int_{R_n} q(x) |\psi(x)|^2 dx \le b$, получим "$x - p$-представление для множества

$$F_{H_q} = \left\{ \psi \in Q(H_q) : \int_{R_n} |\psi(x)|^2 dx \le 1, \int_{R_n} q(x) |\psi(x)|^2 dx \le b, \int_{R_n} G(p) \left| \tilde{\psi}(p) \right|^2 dp \le \tilde{b} \right\}.$$

Применяя критерий компактности Реллиха (см. [11, стр.271, Теорема XIII.65]), завершаем доказательство леммы.

Теорема 1. *В условиях a)-d) оператор* $(H_q - \lambda I)^{-1}$ *компактен при всех* $\lambda \in \rho(H_q)$.

Доказательство. Как отмечалось выше, не теряя общности, можно считать, что H_q является положительным оператором. Поэтому по лемме 1 для доказательства теоремы достаточно доказать, что оператор $(H_q + I)^{-1}$ принадлежит пространству $\sigma_\infty(L_2(R_n))$. Докажем, что оператор $(H_q + I)^{-1}$ переводит единичный шар в компактное множество, т.е.

$$K = \left\{\psi = (H_q + I)^{-1}\varphi :\ \|\varphi\| \leq 1\right\} \subset L_2(R_n)$$

является компактным множеством. Нетрудно видеть, что

$$K \subset \{\psi \in D(H_q) :\ \|\psi\| \leq 1,\ \|H_q\psi\| \leq 1\} \equiv T. \tag{6}$$

Из неравенства Шварца следует, что множество T является подмножеством $F_{H_q}^{(1)}$:

$$T \subset \{\psi \in D(H_q) :\ \|\psi\| \leq 1,\ (H_q\psi, \psi) \leq 1\} \equiv F_{H_q}^{(1)}. \tag{7}$$

Из леммы 2 следует, что множество $F_{H_q}^{(1)}$ компактно и поэтому в силу (6) и (7) множество K компактно. Это означает, что оператор $(H_q + I)^{-1}$ компактен. Теорема доказана.

Следствие. *Из леммы 1 и теоремы 1 вытекает, что в условиях a)-d) спектр оператора* H_q *чисто дискретен.*

3. Разложение по собственным функциям оператора H_q

Из леммы 1 и теоремы 1 вытекает, что для любого положительного числа γ положительный самосопряженный оператор $(H_q + \gamma I)^{-1}$ компактен. Из теории Гильберта-Шмидта (см. [8, стр. 170]) следует, что собственное пространство, соответствующее произвольному ненулевому собственному значению, конечномерно. Собственные элементы взаимно ортогональны, если они отвечают различным собственным значениям. Множество собственных значений имеет не более одной предельной точки $\tau = 0$. Предположим, что собственные значения оператора $(H_q + \gamma I)^{-1}$ упорядочены следующим образом:

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \geq ... \geq \tau_k \geq ...\ \to 0 \text{ при } k \to +\infty.$$

Построим ортонормальную систему $\{u_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом. Условимся, если размерность собственного пространства, соответствующего значению τ_k, равна p_k, писать τ_k p_k раз. При этом условии мы получаем взаимно однозначное соответствие между τ_k и собственными функциями $u_k(x)$. Если число повторений значения τ_k больше 1, то мы выбираем ортонормальный базис в собственном пространстве для этого собственного значения. Таким образом, мы получаем ортонормальную систему

$\{u_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ оператора $(H_q+\gamma I)^{-1}$, отвечающую положительным собственным значениям τ_m, $m=1,2,...$.

Очевидно, что для каждого m $u_m(x)$ является собственной функцией оператора H_q, отвечающей собственному значению $\lambda_m=\frac{1}{\tau_m}-\gamma$, $m=1,2,...$, т.е.

$$H_q u_m(x)=\lambda_m u_m(x)\,, m=1,2,...,(u_k,u_m)=\delta_{km}=\begin{cases}0, & k\neq m\,,\\ 1 & k=m\,,\end{cases}$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_m=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\tau_m}-\gamma\right)=+\infty.$$

Теорема 2. *В условиях a)-d)* $\{u_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ *образуют полную ортонормальную систему в* $L_2(R_n)$, *т.е. для произвольного элемента* $f(x)\in L_2(R_n)$ *справедливо равенство*

$$f(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}c_m u_m(x)\,, \tag{8}$$

где

$$c_m=(f,\ u_m)=\int_{R_n}f(x)\overline{u_m(x)}dx, m=1,2,3,...,$$

и ряд (8) *сходится в смысле* $L_2(R_n)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 для любого положительного числа γ положительный самосопряженный оператор $(H_q+\gamma I)^{-1}$ компактен.
Тогда по теореме Гильберта-Шмидта о разложении (см. [8, стр. 172, Теорема 3.1]) для любого $f(x)\in D(H_q)$ имеем

$$(H_q+\gamma I)\,f(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\tau_m}(f,\ u_m)\,u_m(x)\,. \tag{9}$$

Отсюда следует

$$(H_q+\gamma I)\left(f(x)-\sum_{m=1}^{+\infty}(f,\ u_m)\,u_m(x)\right)=0.$$

Так как $(H_q+\gamma I)>0$, то получаем

$$f(x)-\sum_{m=1}^{+\infty}(f,\ u_m)\,u_m(x)=0.$$

Разложение (9) означает, что ортонормированная система собственных функций $\{u_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ образует полную систему в пространстве $\overline{(H_q+\gamma I)\,D(H_q)}$. Из положительности оператора $H_q+\gamma I$ вытекает, что

$$\overline{(H_q + \gamma I)\, D\,(H_q)} = L_2\,(R_n)\,.$$

Поэтому функции $\{u_m\,(x)\}_{m=1}^{\infty}$ образуют полную ортонормальную систему в пространстве $L_2\,(R_n)$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Алиев А.Р., Эйвазов Э.Х. О дискретности спектра магнитного оператора Шредингера. Функц. анализ и его прилож., 2012, т. 46, no. 4, с. 83-85.

[2] Ахизер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[3] Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовомеханическими процессами. М.: Наука, 1984.

[4] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

[5] Гасымов М.Г., Жиков В.В., Левитан Б.М. Условия дискретности и конечности отрицательного спектра операторного уравнения Шредингера. Матем. заметки,1967, т. 2, no. 5, с. 531-538.

[6] Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.

[7] Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991.

[8] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

[9] Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. Труды ММО, 1953, т. 2, с.169-199.

[10] Повзнер А.Я. О разложениях произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta + c$. Матем. сб., 1953, т. 32, no. 1, с. 109-156.

[11] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Анализ операторов. Т.4. М.: Мир, 1982.

[12] Тимошенко С.П. Теория упругости. Изд. 2, ГТТИ, 1937.

[13] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: Т.2. М.: ИЛ, 1961.

[14] Aliev A. R., Eyvazov E. H. On discreteness of the spectrum of a high order differential operator in multidimensional case, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 2014, vol. 40, no. 1, pp. 28-35.

[15] Kondratiev V., Shubin M. Discreteness of spectrum for the magnetic Schrödinger operators, *Comm. Partial Differential Equations*, 2002, vol. 27, no. 3-4, pp. 477-525.

[16] Kondratiev V., Maz'ya V., Shubin M. Discreteness of spectrum and strict positivity criteria for magnetic Schrödinger operators, *Comm. Partial Differential Equations*, 2004, vol. 29, no. 3-4, pp. 489-521.

[17] Schechter M. *Spectra of partial differential operators*, Amsterdam: North-Holland Publishing, 1971.

[18] Simon B. Schrödinger operators with purely discrete spectrum, *Methods Funct. Anal. Topology*, 2009, vol. 15, no. 1, pp.61-66.

А. Х. Азимов
Кафедра прикладной математики, Бакинский Государственный Университет, ул. З. Халилов, 23, Баку, Азербайджан

Э. Х. Эйвазов
Кафедра прикладной математики, Бакинский Государственный Университет, ул. З. Халилов, 23, Баку, Азербайджан
E-mail: eyvazovelshad@mail.ru

Received 17 June 2015
Accepted 22 July 2015