*Journal of Contemporary Applied Mathematics*
*V. 5, No 1, 2015, September*
*ISSN 2222-5498*

# Оптимальное управление задач относительно эволюции области

Х. Дж. Эфендиева*, Л. А. Рустамова

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления, связанная с изменением формы тела. Движение области, характеризирующее форму тела, описывается одним дифференциальным уравнением. Требуется определить внешние силы тела так, чтобы его форма в конечный момент времени была ближе к заранее заданному состоянию. Для этой задачи получен аналог принципа максимума и, используя это, предлагается численный алгоритм для решения таких задач.

**Key Words and Phrases**: опорная функция, оптимизация формы, принцип максимума, численное решение.

**2000 Mathematics Subject Classifications**: 49J20, 35B50

## 1. Введение

Исследования этих задач, как правило, изучаются изменения точек тела относительно времени. Однако часто представляет интерес не изменение точек тела, а изменение его формы. Изучение задачи в такой постановке связано с некоторыми математическими трудностями. Это в первую очередь связано с определением скорости изменения области, характеризирующей форму тела.

Для исследования таких задач в работе определяется скорость изменения формы области в линейном пространстве пары выпуклых множеств.

## 2. Пространство выпуклых множеств

Пусть $M$ - совокупность выпуклых замкнутых ограниченных множеств в $R^n$.

Функция

$$P_D(x) = \sup_{l \in D}(l, x)\,,\; x \in D, \tag{1}$$

*Corresponding author.

 

называется опорной функцией множества $D \in M$, где $P_D(x)$ является непрерывно-выпуклой и положительно однородной ([3, стр.118]). Формула (1) каждому выпуклому замкнутому ограниченному $D \in M$ сопоставляет выпуклую, непрерывную, положительно однородную функцию $P_D(x)$. Верно и обратное: для каждой непрерывно-выпуклой, положительно-однородной функции $P(x)$ существует единственное замкнутое выпуклое ограниченное множество $D \in M$, такое что $P(x) = P_D(x)$. Множество $D$, совпадает с субдифференциалом функции $P(x)$ в точке $0 \in R^n$ ([3]).

Пусть $a = (A_1, A_2)$, $b = (B_1, B_2)$, $A_i$, $B_i \in M$, $i = 1, 2$, $B$– единичный шар, $S_B = \partial B$ - единичная сфера. В [3, с.112; 4, с.11] показано, что пространство $M \times M$ - линейное. Скалярное произведение $a \bullet b$ в $M \times M$ определим следующим образом

$$a \bullet b = \int_{S_B} p(x)q(x)ds, \tag{2}$$

здесь

$$p(x) = p_{A_1}(x) - p_{A_2}(x), q(x) = p_{B_1}(x) - p_{B_2}(x),$$

где $p_{A_i}(x)$, $p_{B_i}(x)$ - опорные функции множеств $A_i$ и $B_i$, $i = 1, 2$, соответственно. Показано, что $a \bullet b$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Пространство $M \times M$ со скалярным произведением (2) обозначено через $ML_2$. Расстояние в этом пространстве между множествами $A \in M$ и $B \in M$ определяется как норма элемента $a = (A, 0) - (B, 0) = (A, B)$

$$\|a\|_{ML_2} = \sqrt{a \bullet a} = \left( \int_{S_B} \left[ P_A(x) - P_B(x) \right]^2 ds \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Пусть в момент времени $t \in [0, T]$ изучаемая область имеет форму $D(t)$. При изменении $t$ область $D(t)$ также меняется. Скорость изменения области $D(t)$ характеризируется величиной

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{D(t+\Delta t)}(x) - P_{D(t)}(x)}{\Delta t}, \quad x \in S_B.$$

Если существуют области $V_1(t),\ V_2(t) \in M,\ \ t \in [0, T]$,такие , что

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = P_{V_{1(t)}}(x) - P_{V_2(t)}(x),$$

то величину $\dot{D}(t) = (V_1(t), V_2(t)) \in M \times M$ мы будем называть скоростью изменения области $D(t)$. Например, если $D(t) = B_t$ является шаром с радиусом $t$, с центром в начале координат, то $P_{D(t)} = t \cdot \|x\|$ . Тогда $\dot{D}(t) = (B, 0)$.

Если $D(t)$ есть прямоугольник

$$D(t) = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 2t \quad , 0 \le x_2 \le t\},$$

то $\dot{D}(t) = (D(1), 0)$.

Для любого $t$ рассмотрим пару $d(t) = (D_1(t), D_2(t)) \in M \times M$. Записывая

$$d(t) = (D_1(t), 0) \ \ - D_2(t), 0)$$

и предполагая, что $\dot{D}_1(t), \dot{D}_2(t) \in M \times M$, мы аналогично определяем

$$d'(t) = \dot{D}_1(t) - \dot{D}_2(t) \ \in M \times M.$$

## 3. Постановка задачи и основной результат

Пусть область $D(t)$, характеризирующая изучаемый объект является решением следующей задачи

$$\dot{D}(t) = a(t)D(t) + V(t), \, t \in [0, T], \tag{4}$$

$$D(0) = D_0, \tag{5}$$

где $T > 0$ - заданное число, функции $a(t)\,, \ t \in [0,T]$ и $D_0 \in M$ заданы. Будем предполагать, что функция $a(t)$ непрерывна по $t$ на $[0,T]$. Под $D(t)$ и $V(t)$ в правой части мы подразумеваем $(D(t),\, 0) \in M \times M$ и $(V(t),\, 0) \in M \times M$.

Требуется найти область $V(t) \in M, \ t \in [0,T]$, измеримую по $t$ на $[0,T]$ так, чтобы в момент времени $T$ форма области $D(T)$ была ближе к заранее заданной области $Z \in M$.

Математически это задача приводится к минимизации функционала

$$J(V) = \int_{S_B} \left| P_{D(T)}(x) - P_Z(x) \right|^2 ds\,,$$

при условиях (4), (5).

Мы будем рассматривать квозмущенный функционалњ следующего вида

$$J(V) = \int_{S_B} \left| P_{D(T)}(x) - P_Z(x) \right|^2 ds + \alpha \int_0^T \int_{S_B} \left| P_{V(t)}(x) \right|^2 dsdt. \tag{6}$$

Обозначая $d = (D(T),\, 0)\,, \ z = (Z,\, 0)\,, \, v = (V(t),\, 0)$, этот функционал можно написать в компактном виде

$$J(V) = \|d - z\|^2_{ML_2} + \alpha \int_0^T \|v\|^2_{ML_2}\,.$$

Пусть множество управлений имеет вид

$$K = \left\{ V = V(t) \in K_0, \, \dot{\forall} t \in [0,T] \right\} \tag{7}$$

где $K_0 = \{V \in M : \ V_0 \subset V \subset V_1\}$, $V_0, \ V_1 \in M-$ заданные ограниченные выпуклые области.

Если $D(t) \in M$, то уравнение (4) можно написать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = a(t) P_{D(t)}(x) + P_{V(t)}(x), \quad x \in S_B. \tag{8}$$

**Лемма.** *Для любого заданного* $V \in K$ *задач* (4), (5) *имеет единственное решение* $D(t) \in M,\ t \in [0,T]$.

**Доказательство.** Возьмем

$$P(t,x) = \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)\left[P_{D_0}(x) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) P_{V(\tau)}(x)d\tau\right] \tag{9}$$

и покажем, что для любого $t \in [0,T]$, функция $P(t,x)$ - выпуклая.

Учитывая выпуклость множеств $D_0$ и $V(t)$, из последнего получим

$$P\left(t,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right) = \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)\left[P_{D_0}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) P_{V(\tau)}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)d\tau\right] \le$$
$$\le \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)\left[\frac{1}{2}P_{D_0}(x_1) + \frac{1}{2}P_{D_0}(x_2) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{2}P_{V(\tau)}(x_1) + \frac{1}{2}P_{V(\tau)}(x_2)\right)d\tau\right] \le$$
$$\le \frac{1}{2}\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)\left[P_{D_0}(x_1) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) P_{V(\tau)}(x_1)d\tau\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)\left[P_{D_0}(x_2) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) P_{V(\tau)}(x_2)d\tau\right] =$$
$$= \frac{1}{2}P(t,x_1) + \frac{1}{2}P(t,x_2)\ .$$

Это показывает, что функция $P(t,x)$ выпукла по $x \in R^n$, т.е. $P(t,x)$ непрерывно-выпуклая, положительно-однородная функция по $x \in R^n$. Тогда для любого $t \in [0,T]$ существует множество $D(t) \in M,$ такое. что $P(t,x) = P_{D(t)}(x)$. Множество $D(t)$, совпадает с субдифференциалом функции $P(t,x)$ в точке $0 \in R^n$ ([3, стр.118]). Проверяя можно видеть, что $P(t,x) = P_{D(t)}(x)$ удовлетворяет уравнению (8) и начальному условию (5). Доказать единственность решения задачи не представляет сложности. Лемма доказана.

**Теорема.** *Пусть* $V^* = V^*(t) \in K$ *дает минимум функционалу* (6) *при условиях* (4), (5). *Тогда для любого* $v = (V,\,0),\ V \in K_0$

$$-g^* \bullet v^*(t) + \alpha \left\|v^*(t)\right\|^2 \le g^* \bullet v + \alpha \left\|v\right\|^2, \quad \dot\forall t \in (0,T). \tag{10}$$

*Здесь* $g^* = -2(D^*(T), Z) \cdot e^{\int_t^T a(\tau)d\tau}$, $v^*(t) = (V^*(t), 0)$ *и* $D^* = D^*(t)$ *является решением задачи* (4), (5) *при* $V = V^*(t)$.

**Доказательство.** Возьмем любое $V = V(t) \in K$. Решение задачи (4), (5), соответствующее $V$, обозначим через $D(t)$.

Взяв

$$h(t) = (D(t), D^*(t))$$

и записывая

$$h(t) = (D(t), 0) + (0, D^*(t)) = (D(t), 0) - (D^*(t), 0),$$

из (4), (5) получим

$$h'(t) = a(t)h(t) + (V(t), V^*(t)), \tag{11}$$

$$h(0) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (11) можно написать в следующей эквивалентной форме

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} - \frac{\partial P_{D^*(t)}(x)}{\partial t} = a(t)[P_{D(t)}(x) - P_{D^*(t)}(x)] + [P_{V(t)}(x) - P_{V^*(t)}(x)], \quad x \in S_B, \tag{13}$$

Возьмем любое $g(t) = (G_1(t), G_2(t) \in M \times M$. Уравнение (13) умножаем на $P_{G_1(t)}(x) - P_{G_2(t)}(x)$ и интегрируем по $(0, T) \times S_B$. Тогда

$$\begin{gathered}\int_{S_B} \left[P_{G_1(t)}(x) - P_{G_2(t)}(x)\right] \cdot \left[P_{D(t)}(x) - P_{D^*(t)}(x)\right] ds\Big/_0^T + \\ + \int_0^T \int_{s_b} \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(P_{G_1(t)}(x) - P_{G_2(t)}(x)\right) - a(t)\left(P_{G_1(t)}(x) - P_{G_2(t)}(x)\right)\right] \times \\ \times \left[P_{D(t)}(x) - P_{D^*(t)}(x)\right] dt - \\ - \int_0^T \int_{S_B} \left[P_{V(t)}(x) - P_{V*(t)}(x)\right] \left[P_{G_1(t)}(x) - P_{G_2(t)}(x)\right] dsdt = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Теперь вычисляем приращение функционала (6):

$$\begin{gathered}\Delta J \equiv J(V) - J(V^*) = 2\int_{S_B} \left[P_{D(T)}(x) - P_Z(x)\right] \cdot \left[P_{D(T)}(x) - P_{D^*(T)}(x)\right] ds + \\ + \int_{S_B} \left[P_{D(T)}(x) - P_{D^*(T)}(x)\right]^2 ds + \alpha\int_0^T \int_{S_B} \left|P_{V(t)}(x)\right|^2 dsdt - \alpha\int_0^T \int_{S_B} \left|P_{V^*(t)}(x)\right|^2 dsdt.\end{gathered} \tag{15}$$

Добавляя (14) в (15) (так как правая сторона (14) равна нулю) и учитывая, что по условию (12) $P_{D(0)}(x) - P_{D^*(0)}(x) = 0$, имеем

$$\Delta\mathrm{J}=2\int_{\mathrm{S_B}}\left[\mathrm{P_{D^*(T)}(x)}-\ \mathrm{P_Z(x)}\right]\cdot\left[\mathrm{P_{D(T)}(x)}-\mathrm{P_{D^*(T)}(x)}\right]\mathrm{ds}+$$

$$+\int_{S_B}\left[P_{D(T)}(x)-P_{D^*(T)}(x)\right]^2 ds.$$

$$+\int_{S_B}\left[P_{G_1(T)}(x)-\ P_{G_2(T)}(x)\right]\cdot\left[P_{D(T)}(x)-P_{D^*(T)}(x)\right]ds+$$

$$+\int_0^T\int_{s_b}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(P_{G_1(t)}(x)-P_{G_2(t)}(x)\right)-a(t)\left(P_{G_1(t)}(x)-P_{G_2(t)}(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[P_{D(t)}(x)-\ P_{D^*(t)}(x)\right]dt-$$

$$-\int_0^T\int_{S_B}\left[P_{V(t)}(x)-\ P_{V*(t)}(x)\right]\left[P_{G_1(t)}(x)-P_{G_2(t)}(x)\right]dsdt+$$

$$+\alpha\int_0^T\int_{S_B}\left|P_{V(t)}(x)\right|^2 dsdt-\alpha\int_0^T\int_{S_B}\left|P_{V^*(t)}(x)\right|^2 dsdt=0. \tag{16}$$

Пусть $g(t)=(G_1(t),G_2(t)\in M\times M$ является решением задачи

$$g'(t)=-a(t)g(t),\ t\in(0,T],\qquad g(T)=-2(D^*(T),Z). \tag{17}$$

Учитывая обозначение $h(t)=(D(t),D^*(t))$ и определение нормы (3), из (16) получим

$$\Delta J=-\int_0^T(v(t)-v^*(t))\bullet g(t)dt+\alpha\int_0^T\|v\|^2 dt-\alpha\int_0^T\|v^*\|^2 dt+\|h(T)\|^2_{ML_2}. \tag{18}$$

Обозначим

$$r(t,x)=P_{D(t)}(x)-P_{D^*(t)}(x)\,.$$

Тогда задачу (11), (12) можно написать в следующей эквивалентной форме

$$\frac{\partial r(t,x)}{\partial t}=a(t)r(t,x)\ +\left[P_{V(t)}(x)-\ P_{V^*(t)}(x)\right], \tag{19}$$

$$r(0,x)=0,\ \ x\in S_B. \tag{20}$$

Интегрируя уравнение (19) при условии (20), получим

$$|r(t,x)|\le C_1\int_0^t|r(\tau,x)|\,d\tau+\int_0^t\left|P_{V(\tau)}(x)-\ P_{V^*(\tau)}(x)\right|d\tau,$$

где $C_1=\|a\|_{C(0,T)}$. Здесь и в дальнейшем через $C_i$ , $i=1,\,2\,,...,$ будем обозначать константы.

Применяя лемму Гронуолла ([6, с.450]), получим

$$|r(t,x)| \leq C_2 \int_0^t \left|P_{V(\tau)}(x) - P_{V^*(\tau)}(x)\right| d\tau, \ x \in S_B.$$

Учитывая обозначение $r(t,x) = P_{D(t)}(x) - P_{D^*(t)}(x)$, из последнего получим

$$\left|P_{D(T)}(x) - P_{D^*(T)}(x)\right|^2 \leq C_2^2 \left(\int_0^t \left|P_{V(\tau)}(x) - P_{V^*(\tau)}(x)\right| d\tau\right)^2. \qquad (21)$$

Пусть $t \in [0,T]$ является точкой Лебега функции

$$-(v(t) - v^*(t)) \bullet g(t) + \alpha \|v(t)\|^2 - \alpha \|v^*(t)\|^2.$$

Возьмем малое $\varepsilon > 0$ и

$$V(\tau) = \left\{ \begin{array}{c} U, \quad \tau \in [t, t+\varepsilon] \\ V^*(t), \ \ \tau \in [0,T] \backslash [t, t+\varepsilon] \end{array} \right\},$$

где $U \in K_0$ - произвольная выпуклая область. Тогда из (21) получим

$$\left|P_{D(T)}(x) - P_{D^*(T)}(x)\right|^2 \leq C_2^2 \left(\int_t^{t+\varepsilon} \left|P_U(x) - P_{V^*(\tau)}(x)\right| d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon C_2^2 \int_t^{t+\varepsilon} \left|P_U(x) - P_{V^*(\tau)}(x)\right|^2 d\tau.$$

Интегрируя по $S_B$ и учитывая, что $v(t) = (V(t), 0)$ и $v^*(t) = (V^*(t), 0)$, из последнего имеем

$$\|h(T)\|_{ML_2}^2 \leq \varepsilon C_3 \int_t^{t+\varepsilon} \|u - v^*(t)\|_{ML_2}^2 dt \quad . \qquad (22)$$

Здесь $u = (U, 0) \in M \times M$.

Принимая во внимание, что $V^* = V^*(t) \in K$ является решением задачи (4)-(6), из (18) при условии (20) получим

$$\Delta J = -\int_t^{t+\varepsilon} (u - v^*(t)) \bullet g(t) dt + \alpha \int_t^{t+\varepsilon} \|u\|^2 dt - \alpha \int_t^{t+\varepsilon} \|v^*\|^2 dt +$$

$$+ \varepsilon C \int_t^{t+\varepsilon} \|u - v^*(t)\|_{ML_2}^2 dt \geq 0.$$

Поделив на $\varepsilon$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$-(u - v^*(t)) \bullet g(t) + \alpha \|u\|^2 - \alpha \|v^*(t)\|^2 \geq 0, \ \forall t \in (0,T).$$

Принимая во внимание, что $g(t)$ является решением задачи (17), приходим к неравенству (10). Теорема доказана.

## 4. Выводы

Вводя понятие скорости изменения области, изучена задача оптимального управления относительно эволюции области. Полученный аналог принципа максимума дает возможность численно решать широкий класс таких задач.

## Список литературы

[1] *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Экстремальные задачи оптимизации формы упругих тел. – М.: Наука, 1982, 432 с.

[2] *Муравей Л.А.* Задача управления границей для эллиптических уравнений. Вест. Моск. ун-та, сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., 1998, No 3, с. 7-13.

[3] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. – М.: Наука, 1990. 400 с.

[4] *Нифтиев А.А., Ахмедов Э.Р.* Вариационная постановка обратной задачи относительно области. Дифференциальные уравнения. 2007, т.43, No 10, с. 1410-1416.

[5] *Васильев Ф.П.* Методы решения. – М.: Наука, 1981, 518 с.

Х. Дж. Эфендиева
*Бакинский Государственный Университет,*
*ул. З. Халилова, 23, Az 1148, Баку, Азербайджан*
*E-mail:*rasyl1@rambler.ru

Л. А. Рустамова
*Бакинский Государственный Университет,*
*ул. З. Халилова, 23, Az 1148, Баку, Азербайджан*
*E-mail:*lamia_rus@rambler.ru

Received 08 July 2015
Accepted 14 August 2015