Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 5, No 1, 2015, September
ISSN 2222-5498

О базисных свойствах системы собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля, рационально зависящей от спектрального параметра

Аг. Х. Ханмамедов*, М. Г. Махмудова, Г. М. Масмалиев

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача Штурма-Лиувилля, в которой одно граничное условие рационально зависит от спектрального параметра. С помощью оператора преобразования установлена базисность системы собственных функций в пространстве $L_p(0,1)$, $p>1$.

Key Words and Phrases: задача Штурма-Лиувилля, краевая задача, система собственных функций, операторы преобразования, безусловный базис, p-близкость.

2000 Mathematics Subject Classifications: 34B24, 34L10

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничном условии появляются во многих областях естествознания (см. [1]). Такие задачи в различных постановках исследовались во многих работах (см. [1-8] и литературу в них).

Рассмотрим следующее уравнение Штурма-Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 < x < 1, \tag{1}$$

где λ - спектральный параметр; функция $q(x)$- вещественна и $q(x) \in L_2(0,1)$. В данной работе для уравнения (1) исследуются две следующие граничные задачи

$$y'(0) = hy(0), \tag{2}$$

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k}, \tag{3}$$

где a, b, $b_1, b_2, ..., b_N$, $c_1, c_2, ..., c_N$ - действительные постоянные, причем

$$a \geq 0, b_k > 0, c_1 < c_2 < ... < c_N, N \geq 0$$

или

*Corresponding author.

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = \frac{a_1\lambda + b_1}{c_1\lambda + d_1}, \tag{4}$$

где h, a_1, b_1, c_1, d_1 - вещественны; $a_1d_1 - b_1c_1 > 0$.

Заметим, что работах [6, 7] (см. также [5]) при условии $q(x) \in C\,[0,1]$ исследованы базисные свойства в $L_2(0,1)$ собственных функций задач (1), (2), (3) и (1), (2), (4) . В настоящей работе установлена базисность в $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ системы собственных функций краевых задач (1), (2), (3) и (1), (2), (4) с потенциалом $q(x) \in L_2(0,1)$. При этом предложенный нами подход существенно отличается от использованного в [6, 7] подхода и основан на свойствах операторов преобразования (см. [9-11]) для уравнений Штурма- Лиувилля.

В начале рассмотрим задачу (1), (2), (3). Известно [3, 4], что существует бесконечно возрастающая последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1), (2), (3):

$$\lambda_0 < \lambda_1 < .... < \lambda_n < ....$$

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ решение уравнения (1) с начальными условиями $\varphi(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = h$. При каждом фиксированном x функция $\varphi(x,\lambda)$ является целой по λ. Собственные значения задачи (1), (2), (3) суть корни целой функции

$$\Delta(\lambda) = \quad (a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda - c_k})\prod_{k=1}^{N}(\lambda - c_k)\,\varphi(1,\lambda) - \prod_{k=1}^{N}(\lambda - c_k)\,\varphi'(1,\lambda).$$

Кроме того, $\varphi(x,\lambda_n)$ является собственной функцией задачи (1), (2), (3), соответствующей собственному значению λ_n. Как показано в [3, 4], при $n \to \infty$ верна формула:

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n+\nu) + \mathrm{O}(\frac{1}{n}), \tag{5}$$

где

$$\nu = \begin{cases} -\frac{1}{2} - N & \text{при} \quad a \neq 0, \\ \\ -N \quad \text{при} & a = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *При $a \neq 0$ система функций$\left\{\cos\sqrt{\lambda_n}x\right\}$ $(n = 0,1,...; n \neq k_0, k_1, ..., k_N)$ (при $a = 0$ система функций $\left\{\cos\sqrt{\lambda_n}x\right\}$ $(n = 0,1,...; n \neq k_1,...,k_N)$), где $k_0, k_1, ..., k_N$- произвольные фиксированные попарно неравные целые неотрицательные числа, образует базис в пространстве $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$, причем при $p = 2$ базис является безусловным.*

Доказательство. Рассмотрим формулу (5). Пусть, например, $\nu = -\frac{1}{2} - N$, $(a \neq 0)$. Известно, что система функций

$$\left\{\cos(n - \frac{1}{2} - N)\pi x\right\}_{\mathrm{n}=N+1}^{\infty} \tag{6}$$

образует [12] базис в $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$, причем при $p = 2$ базис является ортогональным. В силу (5), система функций (6) квадратично близка к системе

$$\left\{\cos\sqrt{\lambda_n}x\right\}(n = 0, 1, ...; n \neq k_0, k_1, ..., k_N). \tag{7}$$

Тогда из полноты системы функций (7) в $L_p(0,1)$ (см., напр., [11]) вытекает, что эта система образует базис Рисса в $L_p(0,1)$. Последнее влечет за собой безусловность базиса.

Пусть $1 < p < 2$ и $f(x) \in L_p(0,1)$. Через $c_n(f)$, $n = 1, 2, ...$, обозначим коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе (6). Так как система

$$\left\{\sqrt{2}\cos(n - \frac{1}{2} - N)\pi x\right\}_{\mathrm{n}=N+1}^{\infty}$$

является равномерно ограниченной и ортонормированной в $L_p(0,1)$, то по теореме Рисса (см. [13]) имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq M\, \|f\|_{L_p(0,1)},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Откуда следует, что система (6) в $L_p(0,1)$ образует (см. [14]) q-базис. Кроме того, используя (5), получаем

$$\left\|\cos\sqrt{\lambda_n}x - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right\|_{L_p(0,1)}^p = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{при} \quad n \to \infty,$$

согласно которому, система (7) p-близка в $L_p(0,1)$ к системе (6). Так как система (7) полна в $L_p(0,1)$ при $1 < p < 2$, то она образует [14] изоморфный к (7) базис в $L_p(0,1)$. Аналогично, если $p > 2$, то система (6) образует p-базис в $L_p(0,1)$. Очевидно, что система (7) q-близка в $L_p(0,1)$ к системе (6). Кроме того, система (7) ω-линейно независима в $L_p(0,1)$, поскольку она образует базис в $L_p(0,1)$. Откуда следует, что система (7) образует [14] изоморфный к системе (6) базис в $L_p(0,1)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь решение $\varphi(x,\lambda)$ уравнения (1). Как известно [9-11] для этого решения верно представление с помощью оператора преобразования

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt, \tag{8}$$

где $K(x,t)$ – вещественная непрерывная функция и

$$K(x,x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt.$$

Рассмотрим оператор преобразования, определенной формулой

$$(I + \Omega)f = f(x) + \int_0^x K(x,t)f(t)dt.$$

Так как Ω есть вольтеровский интегральный оператор, то оператор $I+\Omega$ имеет обратный оператор того же вида. Это означает, что оператор $I+\Omega$ осуществляет взаимно однозначное отображение пространства $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ на себя. Пользуясь тогда теоремой 1 и формулой (8) получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $k_0, k_1, ..., k_N$ – произвольные фиксированные попарно неравные целые неотрицательные числа. Тогда при $a\neq 0$ система $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $(n=0,1,...;n\neq k_0,k_1,...,k_N)$ и при $a=0$ система $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $(n=0,1,...;n\neq k_1,...,k_N)$ образуют базис в пространстве $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$, причем при $p=2$ базис является безусловным.*

В случае граничной задачи (1), (2), (4) следует использовать формулу

$$\sqrt{\lambda_n}=\pi(n+\nu)+\mathrm{O}(\frac{1}{n}),$$

где

$$\nu=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad c_1\neq 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{при} \quad c_1=0. \end{cases}$$

В этом случае собственные значения граничной задачи (1), (2), (4) суть корни целой функции

$$\Delta(\lambda)=\ (a_1\lambda+b_1)\varphi(1,\lambda)-(c_1\lambda+d_1)\,\varphi'(1,\lambda).$$

Теорема 3. *Пусть k_0 – произвольные фиксированное целое неотрицательное число. Тогда система собственных функций $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $(n=0,1,...;n\neq k_0)$ задачи* (1), (2), (4) *образует базис в пространстве $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$, причем при $p=2$ базис является безусловным.*

Приведенные результаты переносятся также на случай, когда краевое условие (2) принимает вид $y(0)=0$ (см. [5, 8]). В этом случае следует использовать решение $\varphi(x,\lambda)$ уравнения (1), допускающее представление

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt.$$

Список литературы

[1] *Fulton C.T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parametr countained in the boundary conditions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1977, vol. 77, p. 293-288.

[2] *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. Тр. семинара им. И.Г. Петровского, 1983, вып. 9, с. 190-229.

[3] *Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K.* Sturm-Liouville problems with eigenparametr dependent boundary conditions. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1994, vol. 37, No 1, p. 57-72.

[4] *Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A.* Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparametr. I. Proc. Edinburgh Math. Soc., 2002, vol. 45, p. 631-645.

[5] *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. Дифференциальные уравнения, 1997, т. 33, No 1, с. 115-119.

[6] *Керимов Н.Б., Мирзоев В.С.* О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии, Сиб. матем. журн., 2003, т. 44, No 5, с. 1041-1045.

[7] *Керимов Н.Б., Алиев Н.Я.* О базисных свойствах краевой задачи, рационально зависящей от спектрального параметра. Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-матем. наук, 2005, No 4, с. 21-30.

[8] *Марченков Д.Б.* Базисность в пространстве $L_p(0,1)$ системы собственных функций, отвечающей задаче со спектральным параметром в граничном условии. Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, No 6, с. 847-849.

[9] *Повзнер А.Я.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси. Матем. сборник, 1948, т. 23(65), No 1, с. 3-52.

[10] *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.: Наука, 1984.

[10] *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007.

[11] *Моисеев Е.И.* О базисности систем синусов и косинусов. ДАН СССР, 1984, т. 275, No 4, с. 794-798.

[12] *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. – М.: ГИФМЛ, 1958.

[13] *Bilalov B.T., Muradov T.R.* On equivalent bases in Banach spaces. Ukrainian Mathematical Journal, 2007, vol. 59, No 4, p. 615-619.

Аг. Х. Ханмамедов
Бакинский Государственный Университет,
ул. З. Халилова, 23, Az 1148, Баку, Азербайджан
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана ,
ул. Б. Вахабзаде, 9, Az 1141, Баку, Азербайджан
E-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

М. Г. Махмудова
Бакинский Государственный Университет,
ул. З. Халилова, 23, Az 1148, Баку, Азербайджан

Г. М. Масмалиев
Бакинский Государственный Университет,
ул. З. Халилова, 23, Az 1148, Баку, Азербайджан

Received 28 July 2015
Accepted 24 August 2015