Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 2, 2017, December
ISSN 2222-5498

О Представлении Специального Решения Возмущенного Ангармонического Уравнения

Г.М.Масмалиев, А.Х.Ханмамедов

Аннотация. Рассматривается возмущенное ангармоническое уравнение. С помощью оператора преобразования найдено представление решение этого уравнения с условием на бесконечности. Получена оценка ядра оператора преобразования.

Key Words and Phrases: ангармоническое уравнение, оператор преобразования, гиперболическое уравнение второго порядка, функция Римана.

1. Введение

Во многих аспектах теории обратных задач спектрального анализа важную роль играют так называемые операторы преобразования (см. [1] и цитированную там литературу). Эти операторы возникли из общих идей теории операторов обобщенного сдвига, созданной Ж.Дельсартом [2].

В работе [3] построен оператор преобразования для возмущенного ангармонического уравнения вида

$$-y'' - x^2 y + p(x)\, y = \lambda y, \qquad 0 < x < +\infty,$$

где непрерывно дифференцируемый потенциал $p(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{2x^2} x\, |p(x)|\, dx < \infty.$$

В настоящей работе с помощью оператора преобразования найдено представление специального решения возмущенного ангармонического уравнения вида

$$-y'' + x^2 y + q(x)\, y = \lambda y, \qquad 0 < x < +\infty. \tag{1}$$

Однако в отличие от работы [3] на непрерывно дифференцируемую функцию налагается условие

$$\int_0^\infty x\, |p(x)|\, dx < \infty. \tag{2}$$

Заметим, что подобные вопросы для уравнения Шредингера с дополнительным линейным потенциалом изучались в работах [4] – [6].

Рассмотрим невозмущенное уравнение

$$-y'' + x^2 y = \lambda y, \qquad -\infty < x < +\infty \tag{3}$$

Известно, что (см.[7] , [8]) уравнение (3) имеет решение $\psi(x,\lambda) = D_{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}x\right)$, где $U(a,x) = D_{-a-\frac{1}{2}}(x)$- функция параболического цилиндра является решением уравнения

$$-y'' + \frac{x^2}{4} y = -ay.$$

Поведение функции $D_\nu(z)$ для больших значений $|z|$ и фиксированного значения λ определяется [8] асимптотической формулой

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),\ z \to \infty, |\arg z| < \frac{3\pi}{4}.$$

Из последнего соотношения следует, что решение $\psi(x,\lambda)$ при каждом фиксированном λ принадлежит $L_2(0,\infty)$.

Положим

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |p(t)|\, dt, \sigma_1(x) = \int_x^\infty \sigma(t)\, dt\,.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Уравнение (1) с вещественным потенциалом $p(x)$, удовлетворяющим неравенству (2), при всех значениях λ имеет решение $f(x,\lambda)$, представимое в виде*

$$f(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + \int_x^\infty K(x,t)\ \ \psi(t,\lambda)\, dt. \tag{4}$$

Ядро $K(x,t)$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$|K(x,t)| \le \frac{1}{2}\sigma_0\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} \tag{5}$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty p(t)\ dt, \tag{6}$$

2. Доказательство теоремы

Подставляя представление (4) в уравнение (1) находим, что функция (4) заведомо удовлетворяет уравнению (1), если только ядро $K(x,t)$ удовлетворяет гиперболическому уравнению второго порядка

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t^2} - \left(x^2 - t^2 - q(t)\right)\ \ K(x,t) = 0,\ 0 < x < t, \tag{7}$$

и условию (6). Предполагается также, что функция $K^+(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x+t\to+\infty} K(x,t) = \lim_{x+t\to+\infty} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Сведем уравнение (7) с условиями (6), (7) к интегральному уравнению. С этой целью приведем уравнение (7) к каноническому виду; для чего составим уравнение характеристик $\frac{1}{4}\left(dt^2 - dx^2\right) = 0$. Это уравнение допускает два различных интеграла $\frac{t-x}{2} = c_1$ $\frac{t+x}{2} = c_2$. Следовательно, надо ввести новые переменные по формулам

$$\frac{t+x}{2} = \xi,\ \frac{t-x}{2} = \eta.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial r}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} - \frac{\partial K}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi\partial r} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2}$$

Аналогично находим, что

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2}.$$

Полагая

$$U(\xi,\eta) = U\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = K(x,t) = K(\xi-\eta, \xi+\eta),$$

получаем для функции $U(\xi,\eta)$ следующее уравнение

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 K(\xi-\eta,\xi+\eta)}{\partial\xi\partial\eta} - 4\xi\eta K(\xi-\eta,\xi+\eta) = K(\xi-\eta,\xi+\eta)\,p(\xi+\eta) \\ x = \xi-\eta,\ t=\xi+\eta,\ x^2-t^2 = -4\xi\eta, \\ L[U] \equiv \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} - 4\xi\eta U(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)\,p(\xi+\eta) \end{array} \tag{9}$$

и граничные условия

$$U(\xi,0) = \frac{1}{2}\int_\xi^\infty p(\alpha)\,d\alpha, \tag{10}$$

$$\lim_{\xi\to\infty} U(\xi,\eta) = 0,\ \eta > 0. \tag{11}$$

Введем функцию Римана $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ уравнения $L[U] = \psi(\xi,\eta)$, где $\psi(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)p(\xi+\eta)$, т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$L^*(R) \equiv \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\,\partial\eta} - 4\xi\,\eta\,R = 0 \qquad \left\{\begin{array}{c} 0<\eta<\eta_0 \\ \xi_0<\xi<\infty \\ 0<\eta<\xi \end{array}\right. \tag{12}$$

и следующим условиям на характеристиках

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\left|_{\xi=\xi_0} = 1, 0 \le \eta \le \eta_0, \right. \tag{13}$$

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\left|_{\eta=\eta_0} = 1,\ \xi_0 \le \xi < \infty. \right. \tag{14}$$

Нам понадобится явный вид функции $R(\xi,\eta,\ \xi_0,\eta_0)$. С этой целью предпошлем к доказательству теорему следующую лемму.

Лемма. *Пусть*

$$z = 2\sqrt{\left(\xi^2-\xi_0^2\right)\left(\eta_0^2-\eta^2\right)} \tag{15}$$

Тогда функция $R(\xi,\eta,\ \xi_0,\eta_0)$, определенная формулой

$$R\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0\right) = J_0\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \tag{16}$$

где $J_n\left(z\right)$- функция Бесселя первого рода, удовлетворяет соотношениям (12)*-(15). Следовательно, $R(\xi,\eta,\ \xi_0,\eta_0)$является функцией Римана уравнения (9) и обладает свойством симметричности $R\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0\right) = R\left(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta\right)$.*

Доказательство. Функция (11) очевидно удовлетворяет условиям (8), (9). Далее, заметим, что

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial R}{\partial \xi} = 2\xi\left(\eta_0^2-\eta^2\right)J_0'\left(z\right)z^{-1}, \\
\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta} = -4\xi\eta J_0''\left(z\right) - 4\xi\eta J_0'\left(z\right)z^{-1}.
\end{array}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta} - 4\xi\eta R = -4\xi\eta\left(J_0''\left(z\right) + J_0'\left(z\right)z^{-1} + J_0\left(z\right)\right) = 0,$$

т.е. функция (11) является функцией Римана уравнения (4).

Лемма доказана.

Так как переменная z принимает действительные значения, то имеем $\left|J_n\left(z\right)\right| \le 1$. Далее, пользуясь соотношениями $J_{n+1}\left(z\right) + J_{n-1}\left(z\right) = \frac{2n}{x}J_n\left(z\right)$, $J_n'\left(z\right) = -J_{n+1}\left(z\right) + \frac{nJ_n(z)}{z}$, получим $\left|\frac{J_1(z)}{z}\right| \le 1, \left|\frac{J_3(z)}{z}\right| \le \frac{1}{3}, \left|\frac{J_2(z)}{z}\right| \le \frac{1}{2}$. Дифференцируя теперь (11) и учитывая последние оценки, получаем

Следствие. *Имеют место неравенства*

$$\begin{array}{l}
|R| \le 1, \left|\frac{\partial R}{\partial\xi_0}\right| \le 2\xi_0\left(\eta_0^2-\eta^2\right), \\
\left|\frac{\partial R}{\partial\eta_0}\right| \le 2\eta_0\left(\xi^2-\xi_0^2\right), \left|\frac{\partial^2 R}{\partial\xi_0\partial\eta_0}\right| \le 4\xi_0\eta_0.
\end{array} \tag{17}$$

Применив метод Римана к уравнению (9) как и в [3], получим следующее интегральное уравнение для $U(\xi_0,\eta_0)$

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}R(\xi,0;\xi_0,\eta_0)p(\xi)d\xi-\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}U(\xi,\eta)p(\xi+\eta)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta. \quad (18)$$

Таким образом, для решения уравнения (7) с условиями (6), (8) достаточно решить относительно $U(\xi_0,\eta_0)$ интегральное уравнение (18).

Теперь приступим к исследованию интегрального уравнения (18). Будем решать это интегральное уравнение методом последовательных приближений. Положим

$$U_0(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}R(\xi,0;\xi_0,\eta_0)p(\xi)d\xi,$$

$$U_n(\xi_0,\eta_0)=\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}U_{n-1}(\xi,\eta)p(\xi+\eta)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta.$$

Учитывая оценку $|R|\leq 1$, имеем

$$\begin{aligned}&|U_0(\xi_0,\eta_0)|\leq \tfrac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}|\,R(\xi,0;\xi_0,\eta_0)\,|\;|p(\xi)|\,d\xi\leq\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}|p\,(\xi)\,|\;d\xi\leq\\&\leq\tfrac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}|p\,(\xi)|\;d\xi\leq\tfrac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}|p\,(\xi)|\;d\xi,\end{aligned}$$

поскольку $\xi>\xi_0,\;\;\eta<\eta_0$. Тогда будем иметь

$$|U_0\,(\xi_0,\eta_0)|\leq\frac{1}{2}\sigma\,(\xi_0)\,.$$

Далее, найдем, что

$$\begin{aligned}&|U_1\,(\xi_0,\eta_0)|\leq\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}|U_0\,(\xi,\eta)|\cdot|\rho\,(\xi+\eta)|\cdot R\,(\xi,\eta;\,\xi_0,\eta_0)\,d\eta\leq\\&\leq\tfrac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}\sigma\,(\xi)\;\;|p\,(\xi+\eta)|\,d\eta\leq\tfrac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}\sigma\,(\xi)\,d\xi\int_0^{\eta_0}|p\,(\xi+\eta)|\;d\eta\leq\\&\leq\tfrac{\sigma(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\;\int_0^{\eta_0}|p\,(\xi+\eta)|\;d\eta=\tfrac{\sigma(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\;\int_{\xi}^{\eta_0+\xi}|p\,(\alpha)|\;d\alpha\leq\\&\leq\tfrac{\sigma(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}\;\int_{\xi}^{\infty}|p\,(\alpha)|\,d\alpha d\xi\;\leq\tfrac{\sigma(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\;\int_{\xi}^{\infty}|p\,(\alpha)|\,d\alpha=\tfrac{\sigma(\xi_0)}{2}\sigma_1\,(\xi_0)\,.\end{aligned}$$

Пусть теперь $|U_{n-1}(\xi_0,\eta_0)|\leq\frac{1}{2}\,\sigma\,(\xi_0)\,\frac{\sigma_1^{n-1}(\xi_0)}{(n-1)!}$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}&|U_n(\xi_0,\eta_0)|\leq\int_{\xi_0}^{\infty}d\xi\int_0^{\eta_0}|p(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\,\xi_0,\eta_0)U_{n-1}(\xi,\eta)|\,d\eta\;\leq\\&\tfrac{1}{2}\,\sigma\,(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\tfrac{\sigma_1^{n-1}(\xi)}{(n-1)!}\int_{\xi}^{\infty}|p\,(\alpha)|\,d\alpha d\xi\leq\;\tfrac{1}{2}\,\sigma\,(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\tfrac{\sigma_1^{n-1}(\xi)}{(n-1)!}\int_{\xi}^{\infty}|p\,(\alpha)|\,d\alpha d\xi\leq\;,\\&\leq\tfrac{1}{2}\,\sigma\,(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\tfrac{\sigma_1^{n-1}(\xi)}{(n-1)!}d\sigma_1\,(\xi)=\tfrac{1}{2}\,\sigma\,(\xi_0)\,\tfrac{\sigma_1^{n}(\xi_0)}{n!}.\end{aligned}$$

Откуда, очевидно, следует, что ряд $U\,(\xi_0,\eta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n\,(\xi_0,\eta_0)$ сходится, а его сумма является решением уравнения (18) и $U\,(\xi_0,\eta_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|U\,(\xi_0,\eta_0)|\leq\frac{1}{2}\sigma^{+}\,(\xi_0)\,e^{\sigma_1^{+}(\xi_0)}. \quad (19)$$

Поэтому функция $K\,(x,t)\,=\,U\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет задаче (6), (7), (8). Более того, согласно (10), (19), соотношения (5), (6) тоже выполняются.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor // J.Math. Pures et appl., 1938, v.17, p.213-230.

[2] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984, 240 с.

[3] Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А. Обратная задача рассеяния для ангармонического уравнения на полуоси // ДАН СССР, 228, 1976, є1, с. 321-323.

[4] Качалов А.П., Курылев Я.В. Метод операторов преобразования в обратной задаче рассеяния. Одномерный Штрак-эффект// Зап. Научн. Сем. ЛОМИ, 1989, 179, с. 73-87.

[5] Yishen Li. One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis. Chin. Ann. of Math. 1981, 2(2), pp. 147-155.

[6] Абрамович М. , Стиган И. Справочник по специальным функциям, М.:, Наука, 1979.

[7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука, 1974.

Г.М.Масмалиев
Бакинский Государственный Университет
*E-mail:*Hacimasmaliyev @hotmail.com

А.Х.Ханмамедов
Бакинский Государственный Университет
*E-mail:*agil_khanmamedov@yahoo.com

Received 10 July 2017
Accepted 5 August 2017