Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 6, No 2, 2016, December
ISSN 2222-5498

Прямая задача рассеяния для разностного оператора Дирака на всей оси

Р.И.Алескеров, Г.М.Масмалиев, А.Х.Ханмамедов

Аннотация. Рассмотрена прямая задача рассеяния для разностного аналога одномерной системы Дирака. Изучены свойства коэффициентов перехода непрерывного спектра.

Key Words and Phrases: прямая задача рассеяния, операторы преобразования, одномерная система Дирака, коэффициенты перехода.

2010 Mathematics Subject Classifications: 39A70, 47B39

1. Введение

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1} + a_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1} + a_{2,n}y_{1,n} = \lambda y_{2,n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \end{cases} \tag{1}$$

в которой вещественные коэффициенты $a_{1,n}, a_{2,n}$ удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{array}{l} a_{1,n} > 0, \ a_{2,n} < 0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \\ \sum_{n \geq 1} |n| \left\{ |a_{1,n} - A| + |a_{2,n} + A| \right\} + \sum_{n \leq -1} |n| \left\{ |a_{1,n} - 1| + |a_{2,n} + 1| \right\} < \infty \end{array} \right\}, \tag{2}$$

где $A > 0$. Заметим, что система разностных уравнений (1) является разностным аналогом системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a(x) \frac{dy_2}{dx} + q(x) y_2 = \lambda y_1, \\ -\frac{d}{dx} (a(x) y_1) + q(x) y_1 = \lambda y_2, \end{cases}$$

которая превращается при $a(x) \equiv 1$ в одномерную систему Дирака. Отметим, что в работах [1] – [2] изучена обратная задача рассеяния для одномерной системы Дирака. С другой стороны, в работах [3] – [4] подобная задача исследовалась для системы уравнений (1), в том случае, когда $A = 1$. Настоящая работа посвящена прямой задачи рассеяния для системы уравнений (1) с коэффициентами из класса (2).

2. Характеризация данных рассеяния

Для определенности примем, что $A \geq 1$. Обозначим через Γ_j- комплексную λ-плоскость с разрезом по отрезку $\left[-A^{2-j}, A^{2-j}\right]$, $j = 1, 2$. В плоскости Γ_j рассмотрим функцию

$$z_j = z_j\left(\lambda\right) = -\frac{\lambda^2 - 2A^{2(2-j)}}{2A^{2(2-j)}} + \frac{\lambda}{2A^{2-j}}\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} < 0$ при $\lambda > 2A^{2-j}$, $j = 1, 2$. Обозначим через $l^{2,2}\left(-\infty, \infty\right)$ гильбертово пространство вектор-последовательностей $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|y\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|y_{1,n}|^2 + |y_{2,n}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

таких, что $\|y\| < \infty$. В силу (2), оператор L, порождаемый в $l^{2,2}\left(-\infty, \infty\right)$ левой частью системы уравнений (1), ограничен и самосопряжен.

Обозначим через $\{f_{j,n}\left(\lambda\right)\}$ и $\{g_{j,n}\left(\lambda\right)\}$, $j = 1, 2$, решения системы уравнения (1) с асимптотиками

$$\left.\begin{array}{c} f_{j,n}\left(\lambda\right)\left(\frac{Az_1 - A}{\lambda}\right)^{j-2} z_1^{-n} = 1 + o\left(1\right), \, n \to +\infty \\ g_{j,n}\left(\lambda\right)\left(\frac{z_2 - 1}{\lambda}\right)^{j-2} z_2^{-n} = 1 + o\left(1\right), \, n \to -\infty \end{array}\right\} \tag{3}$$

Как показано в [3] , такие решения существуют, единственны и справедливы представления через операторов преобразования

$$\left.\begin{array}{l} f_{j,n}\left(\lambda\right) = \alpha_j^+\left(n\right)\left(\frac{Az_1 - A}{\lambda}\right)^{2-j} z_1^n\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_j^+\left(n, m\right) z_1^m\right), \\ g_{j,n}\left(\lambda\right) = \alpha_j^+\left(n\right)\left(\frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda}\right)^{2-j} z_2^{-n}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_j^-\left(n, m\right) z_2^{-m}\right), \;\; n = 0, \pm1, \pm2, ..., \end{array}\right\} \tag{4}$$

причем величины $\alpha_1^{\pm}\left(n\right), \alpha_2^{\pm}\left(n\right), K_1^{\pm}\left(n, m\right), \; K_2^{\pm}\left(n, m\right)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_j^{\pm}\left(n\right) = 1 + o\left(1\right), \;\; n \to \pm\infty, \;\; j = 1, 2, \\ K_j^{\pm}\left(n, m\right) = O\left(\sigma^{\pm}\left(n + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1 \mp 1}{2}\right)\right), n + m \to \pm\infty \end{array}\right\} \tag{5}$$

где $\sigma^{\pm}\left(n\right) = \sum_{\pm m \geq \pm n}\left\{\left|a_{1,m} - A^{\frac{1 \pm 1}{2}}\right| + \left|a_{2,m} + A^{\frac{1 \pm 1}{2}}\right|\right\}$,
$[x]$- целая часть x. Кроме того,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_{1,n}}{A^{\frac{1\pm1}{2}}} = \left(\frac{\alpha_2^{\pm}(n+1)}{\alpha_1^{\pm}(n)}\right)^{\pm1}, \;\; \frac{a_{2,n}}{A^{\frac{1\pm1}{2}}} = -\left(\frac{\alpha_1^{\pm}(n)}{\alpha_2^{\pm}(n)}\right)^{\pm1}, \\ \frac{a_{1,n}^2 - A^{1\pm1}}{A^{1\pm1}} = \pm\left(K_2^{\pm}\left(n + \frac{1\mp1}{2}, \pm1\right) - K_1^{\pm}\left(n + \frac{1\mp1}{2}, \pm1\right)\right), \\ \frac{a_{2,n}^2 - A^{1\pm1}}{A^{1\pm1}} = \pm\left(K_1^{\pm}\left(n - \frac{1\pm1}{2}, \pm1\right) - K_2^{\pm}\left(n + \frac{1\mp1}{2}, \pm1\right)\right), \;\; n = 0, \pm1, ... \end{array}\right\} \tag{6}$$

Тогда при каждом n функции $\{f_{j,n}(\lambda)\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $j=1,2$, регулярны в плоскостях Γ_1 и Γ_2, непрерывны вплоть до их границ $\partial\Gamma_1$и $\partial\Gamma_2$, соответственно.

Пусть $u_{j,n}$ и $v_{j,n}$ - два решения системы уравнений (1). Их вронскианом назовем величину $W[u_{j,n},v_{j,n}]=a_{1,n-1}\{u_{1,n-1}v_{2,n}-u_{2,n}v_{1,n-1}\}$. Легко видеть, что при $\lambda\in\partial\Gamma_j,\lambda^2\neq 4A^{2(2-j)},j=1,2,$ пары решений $\left\{f_{j,n}(\lambda)\right\}$, $\left\{\overline{f_{j,n}(\lambda)}\right\}$ и $\left\{g_{j,n}(\lambda)\right\}$, $\left\{\overline{g_{j,n}(\lambda)}\right\}$ образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (1), так как их вронскианы равны $\frac{A^2}{\lambda}\left(z_1-z_1^{-1}\right)$ и $\frac{1}{\lambda}\left(z_2^{-1}-z_2\right)$, соответственно. Поэтому справедливы разложения

$$g_{j,n}(\lambda)=a_1(\lambda)\overline{f_{j,n}(\lambda)}+b_1(\lambda)f_{j,n}(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma_1,\ \lambda^2\neq 4A^2, \tag{7}$$

$$f_{j,n}(\lambda)=a_2(\lambda)\overline{g_{j,n}(\lambda)}+b_2(\lambda)g_{j,n}(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma_2,\ \lambda^2\neq 4. \tag{8}$$

Из этих равенств имеем

$$\left.\begin{aligned} a_1(\lambda)&=\frac{\lambda W\left[f_{j,n}(\lambda),g_{j,n}(\lambda)\right]}{A^2\left(z_1-z_1^{-1}\right)}\\ b_1(\lambda)&=\frac{\lambda W\left[\overline{f_{j,n}(\lambda)},g_{j,n}(\lambda)\right]}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)}\\ a_2(\lambda)&=\frac{\lambda W\left[f_{j,n}(\lambda),g_{j,n}(\lambda)\right]}{\left(z_2-z_2^{-1}\right)}\\ b_2(\lambda)&=\frac{\lambda W\left[f_{j,n}(\lambda),\overline{g_{j,n}(\lambda)}\right]}{\left(z_2^{-1}-z_2\right)}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Функции $a_j(\lambda),b_j(\lambda),j=1,2,$ называются коэффициентами перехода непрерывного спектра. Согласно последним формулам функции $a_j(\lambda),b_j(\lambda),j=1,2,$ непрерывны на разрезе $\partial\Gamma_j$, за исключением, быть может, концевых точек. Более того, функции $a_j(\lambda),j=1,2,$ допускают регулярные продолжения в плоскость Γ_2. Имеют место соотношения

$$\begin{array}{l} a_j(\lambda-i0)=\overline{a_j(\lambda+i0)},\\ b_j(\lambda-i0)=\overline{b_j(\lambda+i0)},\end{array}\ -2A^{2-j}<\lambda<2A^{2-j}, \tag{10}$$

$$b_1(\lambda)=\overline{a_1(\lambda)},\ \lambda\in\partial\Gamma_1\backslash\partial\Gamma_2, \tag{11}$$

$$A^2\left(z_1-z_1^{-1}\right)a_1(\lambda)=\left(z_2-z_2^{-1}\right)a_2(\lambda),\ \lambda\in\Gamma_1\bigcup\partial\Gamma_1, \tag{12}$$

$$|a_j(\lambda)|^2-|b_j(\lambda)|^2=\left(\frac{A^2\left(z_1-z_1^{-1}\right)}{z_2-z_2^{-1}}\right)^{(-1)^j},\ j=1,2,\ \lambda\in\partial\Gamma_2. \tag{13}$$

Изучим асимптотическое поведение функций $a_j(\lambda),j=1,2,$ на бесконечности.

Теорема 1. *Справедливы соотношения*

$$a_j(\lambda) = A^{2n+1}\alpha_1^+(n)\,\alpha_1^-(n) + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right) = \\ = A^{2n}\alpha_2^+(n)\,\alpha_2^-(n) + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),\ \lambda \to \infty \quad . \tag{14}$$

Доказательство. Так как вронскиан двух решений не зависит от n, то, полагая $n = 0$ в первом равенстве формул (9), получаем

$$a_1(\lambda) = -\frac{a_{1,0}\alpha_1^+(0)\,\alpha_2^-(1)\,z_2^{-1}}{A\left(z_1 - z_1^{-1}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Принимая во внимание, что $z_j = -A^{2(2-j)}\lambda^{-2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, имеем

$$a_1(\lambda) = Aa_{1,0}\alpha_1^+(0)\,\alpha_2^-(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = A^2\alpha_2^+(1)\,\alpha_2^-(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

где мы учли (6). Более того, из (6) следует, что величины $A^{2n+1}\alpha_1^+(n)\,\alpha_1^-(n)$, $A^{2n}\alpha_2^+(n)\,\alpha_2^-(n)$ не зависят от n и равны между собой. Асимптотическая формула для $a_2(\lambda)$ выводится аналогично.

Теорема доказана.

В силу формулы (10) нули функции $a_j(\lambda)$ образует ограниченное множество. Кроме того, из формул (4), (9) следует, что эти нули расположены симметрично относительно начала координат: $\lambda_k = \pm\nu_k$, $\nu_k > 0,\ k = 1, ..., N_0$. Как и в [3], можно доказать, что функция $a_j(\lambda)$может иметь лишь конечное число нулей λ_k, лежащих вне $\partial\Gamma_2$. С другой стороны, согласно (9), нули функции $a_j(\lambda)$ являются собственными значениями оператора L. Так как оператор L самосопряжен, то числа λ_k вещественны. Докажем, что эти нули простые.

Пусть

$$C_k = \tfrac{g_{j,n}(\lambda_k)}{f_{j,n}(\lambda_k)}, k = 1, ..., N, \\ \left(m_k^+\right)^{-2} = \textstyle\sum_{n\in Z}\left\{f_{1,n}^2(\lambda_k) + f_{2,n}^2(\lambda_k)\right\}, \\ \left(m_k^-\right)^{-2} = \textstyle\sum_{n\in Z}\left\{g_{1,n}^2(\lambda_k) + g_{2,n}^2(\lambda_k)\right\}. \tag{15}$$

Теорема 2. *Нули $\lambda_k, k = 1, ..., N$, функции $a_j(\lambda)$ простые и справедливы равенства*

$$\dot{a}_j(\lambda)\left.\frac{A^{2(2-j)}\left(z_j - z_j^{-1}\right)}{\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k} = C_k\left(m_k^+\right)^{-2} = C_k^{-1}\left(m_k^-\right)^{-2}, k = 1, ..., N, \tag{16}$$

где точкой сверху обозначается производная по λ.

Доказательство. Суммируя соотношения

$$u_{1,n}v_{1,n} + u_{2,n}v_{2,n} = W\left[\dot{u}_{j,n}, v_{j,n}\right] - W\left[\dot{u}_{j,n+1}, v_{j,n+1}\right] = W\left[\dot{v}_{j,n}, u_{j,n}\right] - W\left[\dot{v}_{j,n+1}, u_{j,n+1}\right]$$

при $u_{j,n} = f_{j,n}(\lambda)$, $v_{j,n} = g_{j,n}(\lambda)$, $\lambda = \lambda_k$, и используя (15), получаем

$$W\left[\dot{f}_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)\right] = C_k \sum_{m \geq n} \left\{f_{1,m}^2(\lambda_k) + f_{2,m}^2(\lambda_k)\right\} = C_k^{-1} \sum_{m \geq n} \left\{g_{1,m}^2(\lambda_k) + g_{2,m}^2(\lambda_k)\right\},$$

$$W\left[f_{j,n}(\lambda), \dot{g}_{j,n}(\lambda)\right] = C_k \sum_{m < n} \left\{f_{1,m}^2(\lambda_k) + f_{2,m}^2(\lambda_k)\right\} = C_k^{-1} \sum_{m < n} \left\{g_{1,m}^2(\lambda_k) + g_{2,m}^2(\lambda_k)\right\}.$$

Складывая эти равенства и учитывая (9), получаем соотношения, которые показывают, что нули λ_k являются простыми.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Гасымов М.Г, Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния //Докл. АН СССР, 1966, т.167, No 6, с.1219-1222.

[2] Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси //Докл. АН СССР, 1972, т.207, No 1, с.44-47.

[3] Ханмамедов Аг.Х. Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием //Журн. вычис. мат. и мат. физ., 2005, т.45, No 9, с.1639-1650.

[4] Ханмамедов Аг.Х. Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла // Матем.сборник, 2005, т.196, No 10, с.137-160.

Агиль Х. Ханмамедов
Бакинский государственный университет, AZ1148,г. Баку, ул. З.Халилова, 23
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, AZ1141,г. Баку, ул. Б.Вахабзаде, 9
e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Гаджи М. Масмалиев
Бакинский государственный университет, AZ1148,г. Баку, ул. З.Халилова, 23

Рза И. Алескеров
Гянджинский государственный университет, AZ2000, г. Гянджа, ул. Хатаи, 187
e-mail: alesgerov.rza@mail.ru

Received 03 October 2016
Published 31 October 2016