Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 6, No 2, 2016, December
ISSN 2222-5498

О собственных произведениях многопараметрических матричных уравнений Штурма-Лиувилля

Алмамедов М.С.

Аннотация. Настоящая работа посвящена вопросу об индексах дефекта для многопараметрических систем обыкновенных дифференциальных операторов с матричными коэффициентами. Основные понятия, методы и результаты многопараметрической спектральной теории обсуждаются в монографиях [см. 1-3]. Многопараметрические спектральные задачи для дифференциальных операторов и история исследований в этой области приведены в работах [3] и [4].

Key Words and Phrases: Индекс дефекта, многопараметрический систем, тензорное произведение, матричный круг

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$-y_j^{//}(x_j) + P_j(x_j)\, y_j(x_j) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}(x_j)\, y_j(x_j) = 0, \tag{1}$$

$$0 \leq (x_j) < \infty, j = 1, 2, ..., n,$$

где $y_j(x_j)$ – вектор функция с r_j – компонентами, $P_j(\cdot)$ и $Q_{jk}(\cdot)$ –квадратные матрицы r_j – го порядка и при этом

$$P_j(x_j) = R_j(x_j) + iT_j(x_j)\,, R_j = R_j^*, T_j = T_j^*,$$

и $Q_{jk} = Q_{jk}^*$– непрерывные матрицы- функции на полуоси $[0,\infty)$.

Через $y_1 \otimes ... \otimes y_n$ обозначим тензорное произведение векторов $y_1, ..., y_n$ из $C^{r_1}, ..., C^{r_n}$. Соответственно оно является $(r_1 \times r_2 \times ... \times r_n)$ – компонентным вектором, зависящим от переменных $x_1, ..., x_n$. Тензорное произведение нетривиальных решений систем уравнений (1) при условии квадратичной интегрируемости на множестве $J = \underbrace{[0,\infty) \times ... \times [0,\infty)}_{n}$ с некоторым весом, связанным с матрицами Q_{jk}, является (по определению) собственной функцией задачи (1) . С числом таких линейно-независимых тензорных произведений связано понятие индекса дефекта многопараметрической системы (1) .

Скалярному случаю $(r_1 = ... = r_n = 1)$ изучения квадратично интегрируемых произведений (в этом случае тензорное произведение превращается в обычное произведение функций) посвящены раоботы [5,7].

Мы будем придерживаться предложенного в [7] подхода к этому вопросу, где при фиксированном значении многомерного спектрального параметра $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ из некоторых открытых подмножеств C^n дается оценка числа всевозможных произведений отдельных решений системы многопараметрических уравнений типа Штурма-Лиувилля.

В дальнейшем будем считать, что

$$\inf \left\{\det \left\{y_j^* \left(x_j\right) Q_{jk} \left(x_j\right) y_j \left(x_j\right)\right\}_{j,k=1}^n : \|y_j\| = 1, \, j = 1, 2, ..., n\right\} >0.$$

Через $L^2 \left(J, Q \left(x\right) dx\right)$ обозначим гильбертово пространство $(r_1, ..., r_n)$ – компонентных вектор- функций, измеримых по Лебегу на множестве J и квадратично-интегрируемых относительно положительной (в операторном смысле) матрицы

$$Q \left(x\right) = \det \left\{Q_{jk}^t \left(x\right)\right\}_{j,k=1}^n,$$

где $Q_{jk}^t \left(x\right)$ –тензорно индуцированный оператор в $C^{r_1 \times ... \times r_n}$, соответствующий матрице $Q_{jk} \left(x_j\right)$ (элементы из различных строк матрицы $Q_{jk}^t \left(x\right)$ –попарно перестановочные матрицы).

Цель настоящей работы установить, при каких условиях существует тензорное произведение отдельных нетривиальных решений системы уравнений (1) , принадлежащее пространству $L^2 \left(J, Q \left(x\right) dx\right)$ и дать оценку числа таких произведений.

Посредством матричных неравенств определим следующие подмножества C^n (при каждом значении j) :

$$\Lambda_j^+ = \left\{\lambda \in C^n : T_j \left(x_j\right) + \sum_{k=1}^n \left(Jm\lambda_k\right) Q_{jk} \left(x_j\right) >0, x_j \in [0, \infty)\right\},$$

$$\Lambda_j^- = \left\{\lambda \in C^n : T_j \left(x_j\right) + \sum_{k=1}^n \left(Jm\lambda_k\right) Q_{jk} \left(x_j\right) <0, x_j \in [0, \infty)\right\}.$$

Предподожение 0.1. *Открытое множество* $\Lambda = \bigcap_{j=1}^n \left(\Lambda_j^+ \bigcup \Lambda_j^-\right)$ *непусто.*

Таким образом, множество Λ может быть представлено в виде об]единения 2^n своих открытых подмножеств N_k, определяемых всевоз- можными распределениями знаков, участвующих в определении Λ матриц.

Эти подмножества из C^n будут играть роль верхней и нижней полуплоскостей однопараметрического случая.

Предподожение 0.2. *Существуют матрицанты $\varphi(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ системы (1), удовлетворяющие условиям*

$$\varphi_j(0,\lambda)=E_{r_j},\varphi_j'(0,\lambda),$$

$$\theta_j(0,\lambda)=0,\theta_j'(0,\lambda)=E_{r_j},\lambda\in\Lambda,$$

и такие, что для матричной функции

$$\psi_j(x,\lambda)=\theta_j(x_j,\lambda)+\varphi_j(x_j,\lambda)L.$$

Справедливо равенство

$$\int_0^{x_j}\psi_j^*(\xi_j,\lambda)S_j(\xi_j,\lambda)d\xi_j=JmL+L^*ML+L^*M_1+M_1^*L+M_0,$$

где $S_j(\xi,\lambda)=T_j(\xi_j)+\sum_{k=1}^n(J_m\lambda_k)Q_{jk}(\xi_j)$. $L-$постоянная квадратная матрица порядка r_j, матрицы M и M_0 являются положительными для $\lambda\in\Lambda_j^+$ и отрицательными для $\lambda\in\Lambda_j^-$ при всех $x_j\in[0,\infty)$ и они целые голоморфные функции переменных $\lambda_1,...,\lambda_n$ (однопараметрический векторный случай исследован в работе [10] .

Следующие рассуждения, наряду с обоснованием предложения 1,2, содержат необходимые для дальнейшего обозначения, а также доказательство нижеследующей теоремы.

Введем обозначение

$$\left\|\begin{matrix}Z_j^{(1)}(x_j)\\Z_j^{(2)}(x_j)\end{matrix}\right\|\underline{\underline{def}}\left\|\begin{matrix}y_j(x_j)\\y_j'(x_j)\end{matrix}\right\|.$$

Тогда

$$\left(Z_j^{(1)}\right)'=Z_j^{(2)}(x_j),$$

$$\left(Z_j^{(2)}\right)'=\left[P_j+\sum_{k=1}^n\lambda_kQ_{jk}\right]Z_j^{(1)}(x_j).$$

Другими словами, имеем

$$\left\|\begin{matrix}Z_j'\\Z_j^2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & E_{r_j}\\P_j+\sum_{k=1}^n\lambda_kQ_{jk} & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}Z_j'\\Z_j^2\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}0 & -E_{r_j}\\E_{r_j} & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}P_j+\sum_{k=1}^n\lambda_kQ_{jk} & 0\\0 & -E_{r_j}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}Z_j'\\Z_j^2\end{matrix}\right\|.$$

Таким образом,система дифференциальных уравнений (1) второго порядка сводится к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$Z_j'(x_j)=L_jH_j(x_j,\lambda)Z_j(x).\qquad(2)$$

Пусть $Z_j(x_j)-$ матрицант системы (2) , т.е. Z_j-матрицы размера $r_j\times r_j$ и

$$\left.\begin{array}{l} Z_j'(x_j)=L_jH_j(x_j,\lambda)\,Z_j(x)\ , \\ Z_j(c_j)=E_{r_j},\ \text{ для некоторого числа}\, c_j\in(a_j,b_j)\ . \end{array}\right\} \tag{3}$$

Далее, положим

$$J=-iL_j=\left\| \begin{array}{cc} 0 & i\,E_{r_j} \\ -i\,E_{r_j} & 0 \end{array} \right\|.$$

Ясно, что $J^*=J$.

Теперь рассмотрим матрицу

$$u_j(x_j,\lambda)=J-Z_j^*JZ_j,$$

и докажем, что при некоторых значениях $\lambda\in C^n$ матрица Z_j является J-сжимающей или же J- растягивающей.

Действительно,

$$\begin{array}{l} u_j'=-\left(Z_j'\right)^*JZ_j-Z_j^*JZ_j'=-Z_j^*H_j^*L_j^*JZ_j-Z_j^*JL_jH_jZ_j= \\ =-Z_j^*\left(H_j^*L^*J+JLH_j\right)Z_j=Z_j^*\left(i\left[H_j^*-H_j\right]\right)Z_j=2Z_j^*\left(JmH_j\right)Z_j\ . \end{array}$$

Здесь мы учли во внимание соотнешения
$L^*J=-iE$ и $JL=iE$.
Таким образом

$$u_j'=2Z_j^*\left(JmH_j\right)Z_j.$$

Кроме того

$$u_j(c_j)=J-Z_j^*(c_j)\,JZ_j(c_j)=J-J=0.$$

Тогда

$$u_j(x,\lambda)=2\int_{c_j}^{x_j}Z_j^*(\xi_j,\lambda)\,JmH_j(\xi_j,\lambda)\,Z_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j.$$

Заметим что

$$JmH_j(\xi_j,\lambda)=\left\| \begin{array}{cc} S_j(\xi_j,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

где

$$S_j(\xi_j,\lambda)=T_j(x_j)+\sum_{k=1}^{n}(J_m\lambda_k)Q_{jk}(x_j)=Jm\left\{P_j+\sum\lambda_kQ_j\right\}.$$

Теперь нетрудно видеть, $u_j(x_j,\lambda)-$положительная (строго) матрица, если $\lambda\in\Lambda_j^+$. Действительно, если это не так, то существует вектор

$$f=\left\| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\|\neq 0,$$

такой, что

$$\left(JmH_j(\xi_j,\lambda)\,Z_j(\xi_j,\lambda)\ f,\ Z_j(\xi_j,\lambda)\ f\right)\equiv 0, \tag{4}$$

в некоторой окрестности V_{c_j} точки $c_j \in (a_j, b_j)$.

Положим

$$Z_j(\xi_j, \lambda) = \left\| \begin{array}{cc} A_j(\xi_j, \lambda) & B_j(\xi_j, \lambda) \\ C_j(\xi_j, \lambda) & D_j(\xi_j, \lambda) \end{array} \right\|.$$

Тогда с учетом уравнения (3) будем иметь

$$\left\| \begin{array}{cc} A_j' & B_j' \\ C_j' & D_j' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E_{r_j} \\ P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk} & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} A_j(\xi_j, \lambda) & B_j(\xi_j, \lambda) \\ C_j(\xi_j, \lambda) & D_j(\xi_j, \lambda) \end{array} \right\|.$$

То есть

$$Z_j = \left\| \begin{array}{cc} A_j(\xi_j, \lambda) & B_j(\xi_j, \lambda) \\ A_j'(\xi_j, \lambda) & B_j'(\xi_j, \lambda) \end{array} \right\|.$$

Из равенства (4) получим

$$\left\langle \left\| \begin{array}{cc} S_j(\xi_j, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} A_j & B_j \\ A_j' & B_j' \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cc} A_j & B_j \\ A_j' & B_j' \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\| \right\rangle_{C^{2r_j}} \equiv 0,$$

для всех $\xi_j \in V_{c_j}$.

Отсюда

$$\langle S_j A_j f_1 + S_j B_j f_2,\, A_j f_1 + B_j f_2 \rangle_{C^{r_j}} \equiv 0\,,\ \xi_j \in V_{c_j},$$
$$A_j' f_1 + B_j' f_2 \equiv 0.$$

Если $\lambda \in \Lambda_j^+$, $S_j > 0$ и, поэтому

$$\begin{cases} A_j(\xi_j)\ f_1 + B_j(\xi_j)\ f_2 \equiv 0\,, \xi_j \in V_{c_j}, \\ A_j'(\xi_j)\ f_1 + B_j'(\xi_j)\ f_2 \equiv 0\,,\ \xi_j \in V_{c_j}\,. \end{cases}$$

Отсюда получим, что Z_j в некоторой окрестности точки c_j вырожденная матрица. Это противоречие доказывают, что если $\lambda \in \Lambda_j^+$ $(\lambda \in \Lambda_j^-)$, то $u_j(x_j, \lambda) = J - Z_j^* J Z_j$ положительно (отрицательно) определенная (строго положительная в операторном смысле) матрица.

Итак, если $\lambda \in \Lambda_j^+$, то матрица z_j является J-сжимающей, т.е. $Z_j^* J Z_j < J$.

Теперь, пользуясь установленным свойством матриканта Z_j введем исследуем матричные круги Вейля для системы уравнения (1).

Рассмотрим операторы-матрицы

$\varphi(x_j, \lambda) = A(x_j, \lambda)$ и $\theta(x_j, \lambda) = B(x_j, \lambda)$.

Ясно, что они являются целыми голоморфными функциями от $\lambda \in C^n$ и удовлетворяют начальным условиям

$$\varphi_j(c_j, \lambda) = E_{r_j}, \varphi_j'(c_j, \lambda) = 0,$$

$$\theta_j(c_j, \lambda) = 0, \theta_j'(c_j, \lambda) = E_{r_j}.$$

Введем в рассмотрение матричнозначную функцию

$$\psi_j(x_j, \lambda, l) = \theta_j(x_j, \lambda) + \varphi_j(x_j, \lambda)\ l,$$

где $l-$квадратная постоянная матрица размера $r_j \times r_j$.

Пусть $Y_j(x_j, \lambda)$ есть произвольное матричное решение уравнения (1). Тогда имеем

$$-y_j^* y_j'' + y_j^* \left[P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}\right] y_j = 0.$$

Отсюда

$$\int_{c_j}^{x_j} y_j^*(\xi_j, \lambda)\, y_j''(\xi_j, \lambda)\, d\xi_j = \int_{c_j}^{x_j} y_j^*(\xi_j, \lambda) \left[P_j + \sum \lambda_k Q_{jk}\right] y_j(\xi_j, \lambda)\, d\xi_j,$$

$$y_j^* y_j' \Big/ \begin{matrix} x_j \\ c_j \end{matrix} - \int_{c_j}^{x_j} \left(y_j^*\right)' y_j' d\xi_j = \int_{c_j}^{x_j} y_j^* \left[P_j + \sum \lambda_k Q_{jk}\right] y_j(\xi_j, \lambda)\, d\xi_j.$$

Выделяя мнимую часть, получим:

$$\int_{c_j}^{x_j} y_j^* s_j(\xi_j, \lambda)\, y_j(\xi_j, \lambda)\, d\xi_j = Jm\left[y_j^* y_j'(x_j, \lambda) - y_j^* y_j'(c_j, \lambda)\right] = \frac{1}{2i} W\left[y_j^*, y_j\right] \Big/ \begin{matrix} x_j \\ c_j \end{matrix}\ .$$

Другими словами, имеет место соотношение

$$2i \int_{c_j}^{x_j} y_j^* S_j y_j d\xi_j = W\left[y_j^*, y_j\right] \Big/ \begin{matrix} x_j \\ c_j \end{matrix}\ . \tag{5}$$

Далее заметим, что матрицы-функции φ_j и θ_jявляются решениями (матричными) исходной системы (1), т.е. матрицантами системы (1). Действительно, как и раньше, из соотношения

$$Z' = \left\| \begin{matrix} 0 & E \\ P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk} & 0 \end{matrix} \right\| Z,$$

получим

$A_j' = c_j$, $B_j' = D_j$, $C_j' = \left[P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}\right] A_j$ и

$$D_j' = \left[P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}\right].$$

Если два первых равенства учесть соответственно на двух последних, то получим $A"_j = \left[P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}\right] A_j$ и $B_j'' = \left[P_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}\right] B_j$.

Итак, φ_j и ψ_j две линейно независимые матрицанты (1). Напишем соотношение (5) для матричной функции $\psi_j = \theta_j + \varphi_j l$.

$$2i \int_{c_j}^{x_j} \psi_j^* S_j(\xi_j, \lambda)\, \psi_j(\xi_j, \lambda, l)\, d\xi_j = W\left[\psi_j^*, \psi_j\right](x_j) - W\left[\psi_j^*, \psi_j\right](c_j).$$

Ясно, что

$$W\left[\psi_j^*, \psi_j\right](A_j) =$$

$$= \psi_j^*(A_j)\,\psi_j'(c_j) - \psi_j^{*'}\psi_j(c_j) = l^* - l.$$

Далее

$$-\left(B^{*'} + [A\,l^*]'\right)(B + Al) = \left(B_j^* + l^*A_j^*\right)(D_j + C_j\,l) -$$

$$\left(D_j^* + l^*C^*\right)(B + A\,l) = \left(B_j^*D_j - D_j^*B_j\right) +$$
$$+l^*(A^*D - C^*B) + (B^*C - D^*A)\,l + l^*(A^*C - C^*A)\,l.$$

Отсюда

$$\int_{c_j}^{x_j} \psi_j^* S_j(\xi_j,\lambda)\,\psi_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j = Jm\,l + F(l, x_j, \lambda), \tag{6}$$

где

$$F(l, x_j, \lambda) = l^*Ml + l^*M_1 + M_1^*l + M_0,$$

$$A = \varphi,\ B = \theta,\ C = \varphi',\ D = \theta',$$

$$M_0 = \frac{1}{2i}(B^*D - D^*B) = M_0^*, M_1 = \frac{1}{2i}(A^*D - C^*B),$$

$$M = \frac{1}{2i}(A^*C - C^*A) = M^*.$$

Через $\mathrm{L}_{x_j,\lambda}$ обозначим множество квадратных матриц l порядка $r_j \times r_j$ таких, что

$$F(l, x_j, \lambda) \le 0. \tag{7}$$

Множество $\mathrm{L}_{x_j,\lambda}$назовем матричным кругом для системы уравнений (1) (см. [9]).

Таким образом, матрица l принадлежит множеству $\mathrm{L}_{x_j,\lambda}$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\int_{c_j}^{x_j} \psi_j^* S_j(\xi_j,\lambda)\,\psi_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j \le Jm\,l. \tag{8}$$

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda_j^+$. Тогда $S_j(\xi_j,\lambda) > 0$ (в операторном смысле) и если $l \in \mathrm{L}_{x_j,\lambda}$, то $l \in \mathrm{L}_{x_j',\lambda}$, при $x_j' < x_j$, т.е. $\mathrm{L}_{x_j,\lambda} \subset \mathrm{L}_{x_j',\lambda}$.

Другими словами, семейство L_{x_j}монотонно убывает.

Действительно, имеем

$$F(l, x_j, \lambda) \le 0,$$

а также

$$F\left(l, x_j', \lambda\right) = \int_{c_j}^{x_j'} \psi_j^* S_j \psi_j d\xi_j - Jm\,l < \int_{c_j}^{x_j} \psi_j^* S_j \psi_j d\xi_j - Jm\,l = F(l, x_j, \lambda).$$

Введем обозначение

$$\bigcap_{B_j > x_j > c_j} \mathrm{L}_{x_j,\lambda} = \mathrm{L}.$$

Если $l \in \mathrm{L}$, то

$$\int_{c_j}^{B_j} \psi_j^* (\xi_j, \lambda)\, S_j (\xi_j, \lambda)\, \psi_j (\xi_j, \lambda)\, d\xi_j \leq Jm\, l, \tag{9}$$

где

$$\psi_j (\xi_j, \lambda) = \theta (\xi_j, \lambda) + \varphi_j (\xi_j, \lambda)\ \ l,$$

и наоборот, если выполнено соотношение (9), то $l \in \mathrm{L}$ (предельный матричный круг).

Следующее вычисление является непосредственным следствием (обозначений):

$$-Z_j^* J Z_j = -\left\| \begin{matrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\| = -\left\| \begin{matrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} iC & iD \\ -iA & -iB \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} i (A^*C - C^*A) & i (A^*D - C^*B) \\ i (B^*C - D^*A) & i (B^*D - D^*B) \end{matrix} \right\| =$$

$$= 2 \left\| \begin{matrix} \frac{A^*C - C^*A}{2i} & \frac{A^*D - C^*B}{2i} \\ \frac{B^*C - D^*A}{2i} & \frac{B^*D - D^*B}{2i} \end{matrix} \right\| .$$

Итак, имеем

$$-Z_j^* J Z_j = 2 \left\| \begin{matrix} M & M_1 \\ M_1^* & M_0 \end{matrix} \right\| .$$

При $\lambda \in \Lambda_j^+$ имеем

$$J - Z_j^* J Z_j > 0.$$

Другими словами

$$\left\langle J \left\| \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\| \right\rangle 2 \left\langle \left\| \begin{matrix} M & M_1 \\ M_1^* & M_0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\| \right\rangle > 0.$$

Далее

$$\left\langle \left\| \begin{matrix} 0 \\ -ix \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{matrix} Mx \\ M_1^* x \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\| \right\rangle = 2 (Mx.x) > 0,$$

$$\left\langle J \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{matrix} M & M_1 \\ M_1^* & M_0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\| \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left\| \begin{matrix} iy \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\| \right\rangle = \left\langle \left\| \begin{matrix} iy \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{matrix} M_1 y \\ M_0 y \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ y \end{matrix} \right\| \right\rangle = 2 (M_0 y.y) > 0.$$

Итак, операторы M и M_0 являются строго положительными.
Далее, можно показать, что

$$M_1 M^{-1} M_1^* - M_0 > 0. (\alpha)$$

Поэтому множество $F (l; x_j; \lambda) \leq 0$ представляет собой матричный круг (условие (α)) обеспечивает непустоту множества $\{l : F (l; x_j; \lambda) \leq 0\}$.

При $\lambda \in \Lambda_j^-$ имеем

$$J - Z_j^* J Z_j < 0,$$

или $(Mx,x)<0$ и $(M_0x,x)<0$.

Тогда при $\lambda\in\Lambda_j^-$ семейство матриц l, удовлетворяющих условию $F\left(l;x_j;\lambda\right)\geq 0$ представляет собой матричный круг:

$$l^*\left(-M\right)l+l^*\left(-M_1\right)+\left(-M_1\right)^*l+\left(-M_0\right)\leq 0,$$

$$-M>0,\ -M_0>0.$$

Итак, пусть $\lambda\in\Lambda_j^-$. Тогда $S_j\left(\xi_j,\lambda\right)<0$ и

$$\int_{c_j}^{x_j}\psi_j^*S_j\psi_jd\xi_j=Jml+F\left(l;x_j;\lambda\right). \tag{10}$$

Через $\tilde{\mathrm{L}}_{x_j;\lambda}$обозначим матричный круг

$$F\left(l;x_j;\lambda\right)\geq 0. \tag{11}$$

Далее $l\in\tilde{\mathrm{L}}_{x_j;\lambda}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{c_j}^{x_j}\psi_j^*S_j\left(\xi_j,\lambda\right)\psi_j\left(\xi_j;\lambda\right)d\xi_j\geq Jml. \tag{12}$$

Пусть $l\in\tilde{\mathrm{L}}_{x_j;\lambda}$ и $x_j'<x_j$. Тогда
$F\left(l;x_j;\lambda\right)\geq 0$ и

$$F\left(l;x_j';\lambda\right)=\int_{c_j}^{x_j'}\psi_j^*S_j\psi_jd\xi_j-Jml\geq$$

$$\geq\int_{c_j}^{x_j}\psi_j^*S_j\psi_jd\xi_j-Jml=F\left(l;x_j,\lambda\right).$$

Таким образом, при $\lambda\in\Lambda_j^-$ матричные круги (11) монотонно убывают (вложены друг в друге) с возрастанием $x_j\to b_j$.

Введем обозначение

$$\bigcap_{B_j>x_j>C_j}\tilde{\mathrm{L}}_{x_j,\lambda}\equiv\tilde{\mathrm{L}}.$$

Если $l\in\tilde{\mathrm{L}}$, то

$$\int_{C_j}^{B_j}\psi_j^*S_j\psi_jd\xi_j\geq Jml, \tag{13}$$

и наоборот , если выполнено (13), то $l\in\tilde{\mathrm{L}}$(предельный матричный круг для $\forall\lambda\in\Lambda_j^-$).

(13) эквивалентно неравенству

$$\int_{c_j}^{x_j}\psi_j^*\left(-S_j\right)\psi_jd\xi_j\geq -Jml. \tag{14}$$

Но если $\lambda\in\Lambda_j^-$, то $-S_j=|S_j|$ и поэтому также $-Jml=|Jml|$.

Таким образом , если $\lambda \in \Lambda_j^+ \bigcup \Lambda_j^-$, то имеем

$$\int_{c_j}^{x_j} \psi_j^* (\xi_j, \lambda) \left| S_j (\xi_j, \lambda) \right| \psi_j (\xi_j, \lambda) \, d\xi_j \le \left| Jml \right|, \tag{15}$$

(здесь $|T| = (T^*T)^{1/2}$; если $T = T^*$, то $|T| = \sqrt{T^2}$есть неотрицательный оператор, где

$$\psi_j (\xi_j, \lambda) = \theta_j (\xi_j, \lambda) + \varphi_j (\xi_j, \lambda) \, l,$$

причем θ_j и φ_j- решения матричного уравнения

$$-Y_j'' + P_j Y_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk} Y_j = 0,$$

удовлетворяющие условиям Коши:

$$\varphi_j (c_j) = E, \;\; \varphi_j' (c_j) = 0, \;\; \theta_j (c_j) = 0, \;\; \theta_j' (c_j) = E_{r_j}$$

Пусть теперь

$$l_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \;, ..., \; l_{r_j} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\|$$

ортвекторы.

Напишем соотношение (15) для $\lambda \in \Lambda_j^+$ и не векторах

$$e_1, ..., e_{r_j}$$

$$\int_{c_j}^{b_j} \left(\psi_j^* S_j \psi_j e_1, e_1 \right) d\xi \le \left((Jme) \, e_1, e_1 \right),$$

или

$$\int_{c_j}^{b_j} \left(S_j \psi_j e_1, \psi_j e_1 \right) d\xi_j < +\infty.$$

Пусть

$$\psi_j (\xi_j, \lambda) = \left\| \begin{matrix} \psi_j^{11} & . \;\; . \;\; . & \psi_j^{1 r_j} \\ . & . \;\; . \;\; . & . \\ . & . \;\; . \;\; . & .. \\ . & . \;\; . \;\; . & . \\ \psi_j^{r_j, 1} & . \;\; . \;\; . & \psi_j^{r_j, r_j} \end{matrix} \right\| .$$

Тогда

$$\psi_j e_1 = \left\| \begin{matrix} \psi_j^{11} \\ \vdots \\ \psi_j^{r_j, 1} \end{matrix} \right\| = h_j^1 (\xi_j, \lambda) \, .$$

Аналогично,

$$\psi_j e_2 = \left\| \begin{array}{c} \psi_j^{12} \\ \vdots \\ \psi_j^{r_j,2} \end{array} \right\| = h_j^2\left(\xi_j,\lambda\right), ..., \psi_j e_{r_j} = h_j^{r_j}\left(\xi_j,\lambda\right).$$

Таким образом

$$\int_{c_j}^{b_j} \Big(S_j\left(\xi_j,\lambda\right) h_j^k\left(\xi_j,\lambda\right), h_j^k\left(\xi_j,\lambda\right)\Big) d\xi_j < \infty, \tag{16}$$

$$k = 1, 2, ..., r_j,$$

и в общем случае, для $\lambda \in \Lambda_j^+ \bigcup \Lambda_j^-$ имеем функции $h_j^k\left(\xi_j,\lambda\right)$, $k = 1, 2, ..., r_j$, обладающие свойством

$$\int_{c_j}^{b_j} \Big(\left|S_j\left(\xi_j,\lambda\right)\right| h_j^k\left(\xi_j,\lambda\right),\, h_j^k\left(\xi_j,\lambda\right)\Big) d\xi_j < \infty. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что вектор –функции $h_j^1\left(\xi_j,\lambda\right), ..., h_j^{r_j}\left(\xi_j,\lambda\right)$ линейно независимы.

Действительно, эти векторы совпадают в точности с соответствующими столбцами матрицы $\psi_j\left(\xi_j,\lambda\right)$ и

$$\det \psi_j\left(c_j,\lambda\right) = \det\left(\theta_j\left(\sigma_j,\lambda\right) + \varphi_j\left(\sigma_j,\lambda\right) l\right) = \det l,$$

$$\det \psi_j'\left(c_j,\lambda\right) = \det\left(\theta_j'\left(c_j\right) + \varphi_j'\left(c_j\right) l\right) = 1.$$

Если линейно независимы функции $\frac{d}{d\xi_j} h_j^1, ..., \frac{d}{d\xi_j} h_j^{r_j}$, то и сами функции $h_j^1, ..., h_j^{r_j}$ линейно независимы.

Теперь исследуем вопрос о принадлежности вектор - функции $y_1\left(x_1,\lambda\right) \otimes ... \otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)$ (с $r_1 \times r_2 \times ... \times r_n$ компонентом) пространству с весом $L^2\left(I_b, Q\left(x\right) dx\right)$,
где

$$X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in I_b = [c_1, b_1) \times ... \times [c_n, b_n)$$

и

$$\det \left\| \begin{array}{ccccc} Q_{11}^t & . & . & . & Q_{1n}^t \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ Q_{n1}^t & . & . & . & Q_{nn}^t \end{array} \right\| = Q\left(x\right),$$

является квадратной матрицей функцией размера $r_1 \times r_2 \times ... \times r_n$.

Очевидно, что

$$Q\left(x\right) y_1 \otimes ... \otimes y_n = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma Q_{1\sigma(1)}^t ... Q_{n\sigma(n)}^t y_1 \otimes ... \otimes y_n = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \left(Q_{1\sigma(1)} y_1\right) \otimes ... \otimes \left(Q_{n\sigma(n)} y_n\right).$$

Поэтому

$$\left(Q\left(x\right)y_1\otimes...\otimes y_n,y_1\otimes...\otimes y_n\right)=\sum_{\sigma}\left(Q_{1\sigma(1)}y_1,y_1\right)...\left(Q_{n\sigma(n)}y_n,y_n\right)=$$

$$=\det\left\{\left(Q_{jk}y_j,y_j\right)\right\}=\det_{j,k=\overline{1,r_j}}\left\{y_j^*Q_{jk}y_j\right\}.$$

Пусть $\lambda\in\Lambda$ и $\lambda\notin R^n$. Тогда хотя бы для одной координаты λ_t точки λимеем $Jm\lambda_t\neq 0$.

Рассмотрим

$$\left(Q\left(x\right)\left[y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes...\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)\right],\left[y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes...\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)\right]\right)=$$

$$=\det\left\{\left(Q_{jk}\left(x_j\right)y_j\left(x_j,\lambda\right),y_j\left(x_j,\lambda\right)\right)\right\}_{j,k=1}^n.$$

Очевидно, что

$$\det\left\|\begin{array}{ccccc}(Q_{11}y_1,y_1) & ... & (Q_{1t}y_1,y_1) & ... & (Q_{1n}y_1,y_2)\\ . & ... & . & ... & .\\ . & ... & . & ... & .\\ . & ... & . & ... & .\\ (Q_{n1}y_n,y_n) & ... & (Q_{nt}y_n,y_n) & ... & (Q_{nn}y_n,y_n)\end{array}\right\|=$$

$$=\left(Q_{1t}y_1\left(x_1\right),y_1\left(x_1\right)\right)Q^{(1,t)}\left(x_2,...,x_n\right)+\left(Q_{2t}y_2\left(x_2\right),y_2\left(x_2\right)\right)Q^{(2,t)}\left(x_1,x_3,...,x_n\right)+$$

$$...+\left(Q_{n,t}y_n\left(x_n\right),y_n\left(x_n\right)\right)Q^{(n,t)}\left(x_1,x_2,...,x_{n-1}\right). \quad (18)$$

Далее , нетрудно видеть, что

$$Q_{jt}\left(x_j\right)=\frac{1}{Jm\lambda_t}S_j\left(x_j,\lambda\right)-\frac{1}{Jm\lambda_t}T_j\left(x_j\right)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n}\left(\frac{Jm\lambda_k}{Jm\lambda_t}\right)Q_{jk}\left(x_j\right),j=\overline{1,n}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) имеем

$$\left(Q\left(x\right)y_1\otimes...\otimes y_n,y_1\otimes...\otimes y_n\right)=$$

$$=\sum_{q=1}^{n}\left(Q_{qt}\left(x_q\right)Y_q\left(x_q,\lambda\right),Y_q\left(x_q,\lambda\right)\times Q^{(q,t)}\left(x_1,...,\hat{x}_q,...,x_n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{Jm\lambda_t}\sum_{q=1}^{n}\left(s_q\left(x_q,\lambda\right)Y_q\left(x_q,\lambda\right),Y_q\left(x_q,\lambda\right)\right)Q^{(q,t)}\left(x_1,...,\hat{x}_q,...,x_n\right),$$

$$-\frac{1}{Jm\lambda_t}\sum_{q=1}^{n}\left(T_q\left(x_q\right)Y_q,Y_q\right)Q^{(q,t)}\left(\cdot\right)-$$

$$-\sum_{q=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n}\left(\frac{Jm\lambda_k}{Jm\lambda_t}\right)\Big(Q_{qk}\left(x_q\right)\left(Y_q,Y_q\right)\cdot Q^{(q,t)}\left(x_1,...,\hat{x}_q,...,x_n\right)\Big).$$

Далее имеем

$$\left(Q\left(x\right)y_1\otimes...\otimes y_n\right)=\det\left\{\left(Q_{jk}S_j,y_j\right)\right\}_{j,k=1}^{n}=$$

$$=\frac{1}{Jm\lambda_t}\det\begin{Vmatrix}(Q_{11}y_1,y_1) & . \; . \; . & (S_1y_1,y_1) & . \; . \; . & (Q_{1n}y_1,y_1)\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ (Q_{n1}y_n,y_n) & . \; . \; . & (S_ny_n,y_n) & . \; . \; . & (Q_{nn}y_n,y_n)\end{Vmatrix}-$$

$$\underbrace{-\frac{1}{Jm\lambda_t}\det\begin{Vmatrix}(Q_{11}y_1,y_1) & . \; . \; . & (T_1y_1,y_1) & . \; . \; . & (Q_{1n}y_1,y_1)\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ (Q_{n1}y_n,y_n) & . \; . \; . & (T_ny_n,y_n) & . \; . \; . & (Q_{nn}y_n,y_n)\end{Vmatrix}}_{Q_T(x)}-$$

$$-\frac{1}{Jm\lambda_t}\det\begin{Vmatrix}(Q_{11}y_1,y_1) & . \; . \; . & \sum_{k\neq t}\left(Jm\lambda_k\right)\left(Q_{1k}\left(x_1\right)y_1,y_1\right) & . \; . \; . & (Q_{1n}y_1,y_1)\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & . & . \; . \; . & .\\ (Q_{n1}y_n,y_n) & . \; . \; . & \sum\left(Jm\lambda_k\right)\left(Q_{nk}\left(x_n\right)y_n,y_n\right) & . \; . \; . & (Q_{nn}y_n,y_n)\end{Vmatrix}.$$

Поэтому для произвольной точки $b'\in(c,b)$ справедливо следующее интегральное соотношение

$$\int_{[c,b')}\left(Q\left(x\right)y_1\otimes...\otimes y_n,y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes...\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)\right)dx_1...dx_n=$$

$$=\frac{1}{Jm\lambda_t}\int_{[c,b')}\sum_{q=1}^{n}\left(S_qy_q,y_q\right)Q^{(q,t)}\left(x_1,...,\hat{x}_q,...,x_n\right)dx-$$

$$-\frac{1}{Jm\lambda_t}\int_{[c,b')}\sum_{q=1}^{n}\left(T_qy_q,y_q\right)Q^{(q,t)}dx-\frac{1}{Jm\lambda_t}\sum_{q=1}^{n}\int_{[c,b')}\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n}\left(Jm\lambda_k\right)\left(Q_{qk}Y_q,Y_q\right)Q^{(q,t)}dx.$$

Имеем

$$\det\begin{Vmatrix}(Q_{11}y_1,y_1) & . \; . \; . & \left(Jm\lambda_1\right)\left(Q_{11}y_1,y_1\right)+...\\ . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & .\\ . & . \; . \; . & .\\ (Q_{n1}y_n,y_n) & . \; . \; . & \left(Jm\lambda_1\right)\left(Q_{n1}y_n,y_1\right)+...\end{Vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} ... + Jm\lambda_t\,(\hat{Q}_{1t}y_1, y_1) + .. + (Jm\lambda_n)\,(Q_{1n}y_1, y_1) & ... & (Q_{1n}y_1, y_1) \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ .. + Jm\lambda_t\,(\hat{Q}_{nt}y_n, y_n) + .. + (Jm\lambda_n)\,(Q_{nn}y_n, y_n) & ... & (Q_{nn}y_n, y_n) \end{array} \Bigg\|$$

$$= 0.$$

Так как этот детерминант равен сумме $n-1$ штук детерминантов, каждый из которых имеет двух одинаковых столбцов.

Итак, существует номер $t \in \{1, 2, ..., n\}$ такой, что

$$\int_{[c,b')} (Qy_1 \otimes ... \otimes y_n, y_1 \otimes ... \otimes y_n)\, dx =$$

$$= \frac{1}{Jm\lambda_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{[c_q, b'_q)} (s_q y_q, y_q)\, dx_q \int ... \int Q^{(q,t)} dx_1 ... dx_q ... dx_n -$$

$$- \frac{1}{Jm\lambda_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{[c_q, b'_q)} (T_q y_q, y_q)\, dx_q \int ... \int Q^{(q,t)} dx_1 ... \overset{\wedge}{dx_q} ... dx_n.$$

С учетом виде алгебраических дополнений $Q^{(q,t)} \left(x_1, ..., \overset{\wedge}{x_q}, ..., x_n \right)$ из предыдущей формулы мы получим

$$\int_{[c,b')} \det \{(Q_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^{n} dx =$$

$$\frac{1}{Jm\lambda_t} \sum_{q=1}^{n}$$

$$\Bigg\{ \int_{c_q}^{b'_q} (s_q y_q, y_q)\, dx_q \cdot (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_q} \left(Q_{1\sigma(1)} y_1, y_1 \right) dx_1 ... \int_{c_q}^{\overset{\wedge}{b'_q}} \overset{\wedge}{dx_q} ... \int_{c_n}^{b^i_n} \left(Q_{n\sigma(n)} y_n, y_n \right) dx_n -$$

$$- \frac{1}{Jm\lambda_t} \sum_{q=1}^{n} (T_q y_q, y_q)\, dx \cdot (-1)^{q+t} \sum_{\sigma} \int_{c_1}^{b'_1} \left(Q_{1\sigma(1)} y_1, y_1 \right) ... \int_{c_n}^{b'_n} \left(Q_{n\sigma(n)} y_n, y_n \right).$$

Например, при $q = 1$

$$\frac{1}{Jm\lambda_t} \int_{c_1}^{b'_1} \left(s_1^{(\lambda)} y_1, y_1 \right) dx_1 \cdot (-1)^{1+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_2}^{b'_2} \left(Q_{2\sigma(2)} y_2, y_2 \right) dx_2 ... \int_{c_n}^{b'_n} \left(Q_{n\sigma(n)} y_n, y_n \right) dx_n - ...$$

$$(t \notin \sigma(2), ..., \sigma(n)),$$

и аналогично при $q=n$ получим

$$\frac{1}{Jm\lambda_t}\int_{c_n}^{b'_n}(s_n y_n, y_n)\,dx_n\cdot(-1)^{n+t}\sum_{\sigma}\int_{c_1}^{b'_1}\left(Q_{1\sigma(1)}y_1, y_1\right)dx_1...$$

$$\int_{c_{n-1}}^{b'_{n-1}}\left(Q_{n-1,\sigma(n-1)}y_{n-1}, y_{n-1}\right)dx_{n-1}-...\ \ ,\quad (t\notin\sigma\left(1\right),...,\sigma\left(n-1\right)).$$

Таким образом, здесь участвуют все элементы матрицы $\{(Q_{jk}y_j, y_j)\}$ кроме ее $t-$го столбца.

Тогда получим, что если все $(Q_{jk}y_j, y_j)$ $(k\neq t)$ "подчинены" $(s_j y_j, y_j)$, в также $(T_j y_j, y_j)$ "подчинены" $(s_j y_j, y_j)$, то тензорное произведение $\psi_1\otimes...\otimes\psi_n$ принадлежит пространству $L^2\left([c,b);Q\left(x\right)dx\right)$.

Теперь поинтересуемся другими возможными решениями из

$$L^2\left([c,b);Q\left(x\right)dx\right).$$

Рассмотрим формулу (5) матричных решений

$$\int_{c_j}^{x_j}Y_j^* S_j\left(\xi_j,\lambda\right)Y_j\left(\xi_j,\lambda\right)d\xi_j=\frac{1}{2i}W\left[Y_j^*, Y_j\right]|_{c_j}^{x_j}.$$

Положим $Y_j=\varphi_j$. Тогда имеем

$$\int_{c_j}^{x_j}\varphi'_j S_j\left(s_j,\lambda\right)d\xi=\frac{1}{2i}W\left[\varphi_j^*,\varphi_j\right]\left(x_j\right).$$

Так как

$$W\left[\varphi_j^*,\varphi_j\right]\left(c_j\right)=\varphi_j^*\left(c_j\right)\cdot\varphi'_j\left(c_j\right)-\varphi_j^{*'}\left(c_j\right)\varphi_j\left(c_j\right)=0.$$

Далее
$\varphi_j\left(x_j,\lambda\right)=A\left(x_j,\lambda\right)$ и $A'_j\left(x_j,\lambda\right)=c_j\left(x_j,\lambda\right)$,
и поэтому

$$\varphi_j^*\left(x_j\right)\varphi'_j\left(x_j\right)-\varphi_j^{*'}\left(x_j\right)\varphi_j\left(x_j\right)=A_j^*\left(x_j,\lambda\right)c_j\left(x_j,\lambda\right)-c_j^*\left(x_j,\lambda\right)A_j\left(x_j,\lambda\right)=2iM\left(x_j,\lambda\right).$$

Итак

$$\int_{c_j}^{x_j}\varphi_j^* S_j\varphi_j d\xi_j=M\left(x_j,\lambda\right).$$

Отсюда видно, что
$M\left(x_j,\lambda\right)<M\left(x'_j,\lambda\right)$ при $x_j<x'_j$.
Поэтому существует

$$\lim_{x_j\to b_j}M\left(x_j,\lambda\right)\equiv M\left(\lambda\right)\geq 0.$$

Если $M\left(\lambda\right)>0$, то по определению имеем случай предельного круга $\{l:F\left(l,x_j,\lambda\right)\leq 0\}$, если же $\ker\,M\left(\lambda\right)\neq\{0\}$, то случай предельной точки.

Можно показать, что матричный круг может быть представлен в виде

$$l(x,\lambda) = l_0(x,\lambda) + r_1^{1/2}\, W r_2^{1/2}(x,\lambda),$$

где l_0- центр, $l_0 = -M^{-1}M_1^*$, r_1-левый радиус, $r_1 = M^{-1}$, r_2-правый радиус, $r_2 = M_1 M^{-1} M_1^* - M_0$, W_0- пробегает единичный матричный круг : $W^*W \leq E$.

Далее, можно показать, что существуют предельные матрицы

$$\lim_{\xi_j \to b_j} r_1(\xi_j,\lambda) = r_1 \geq 0, \lim_{\xi_j \to b_j} r_2(\xi_j,\lambda) = r_2 \geq 0, \lim_{\xi_j \to b_j} l_0(\xi_j,\lambda) = l_0,$$

и предельный круг состоит из тех и только тех матриц l, которые представлены в виде

$$l = l_0 + r_1^{1/2}\, W r_2^{1/2}, W^*W \leq E.$$

Если матрица $M_j(\lambda)$ невырожденная для некоторых значений $j \in \{1,2,...,n\}$, то можно найти дополнительные тензорные произведения решений, принадлежащие пространству $L^2(J,Q(x)\,dx)$. Более того, это соображение позволит оценить число таких произведений аналогично скалярному случаю [7].

Естественный вопрос о независимости числа решений линейно независимых тензорных произведений от параметров многопараметрической системы (1) решается следующим образом: это число является постоянным на каждой компоненте N_k, $k = 1,2,...,2^n$ множества Λ. Соответствующий общий результат (для абстрактно заданных многопараметрических операторов) получен в совместной работе П.Дж. Брауна и Г.А. Исаева [13].

Если к построению множеств параметров типа Λ подойти с помощью действительной части коэффициентов уравнений (1), то матрицант системы уравнений первого порядка будет

$$\tilde{K} = \begin{Vmatrix} 0 & E_r \\ E_r & 0 \end{Vmatrix},$$

сжимающим для соответствующего множества $\tilde{\Lambda}_j^-$, но для $\lambda \in \tilde{\Lambda}_j^+$ оператор Z_j аналогичным свойством не обладает.

Рассматривая нами задача частично изучена в [11], [12].

Список литературы

[1] Atkinson F.V. Multiparameter eigenvalue Problems. N.Y., 1972, vol. 1.

[2] Sleeman B.D. Res. Notes Math., 1978, №22.

[3] Isaev H.A. Lectures on multiparameter spectral theory. Univ. of Calgary, 1985.

[4] Исаев Г.А. Матем. Сб., 1986, т. 131(173), №1(9), с. 52.

[5] Sleeman B.D. -Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1973, vol. A71, p.3

[6] Atkinson F.V. -Proc. Internat. Confer. Diff. Egnat. Stockholm. 1977, p.1.

[7] Исаев Г.А.-ДАН СССР, 1981, т. 261, №4, с. 787-791.

[8] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М., Мир, 1968.

[9] Березанский Ю.М., Тр. ММО, 1956, т. 5, с. 203-268.

[10] Биргер Е.С., Калябин Г.А. ифференц. уравнения, 1976, т. 12, №9, с. 1531-1540.

[11] Алмамедов М.С. ДАН ССР, 1989, т. 305, №1, с. 14-17.

[12] Алмамедов М.С. Тезисы АГЭИ, 1991, с. 181.

[13] Aslanov A., Isahanly H. A multi-dimensional complex analytical view on the multi-parameter spectrum and the construction of the spectral measure, Khazar Math Journal, ISSN 1028-7647, 3-65 (1998)

Алмамедов М.С.
Азербайджанский государственный экономический институт

Received 20 October 2016
Accepted 22 November 2016