Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 2, 2017, December
ISSN 2222-5498

О Разрешимости Одного Класса Дифференциальных Уравнений в Частных Производных в Гильбертовом Пространстве

Н.М.Сулейманов

Аннотация. В работе получены достаточные условия, которые обеспечивают регулярно разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка эллиптического типа. Эти условия выражены свойствами коэффициентов данных уравнений.

Key Words and Phrases: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнения, регулярное решение.

1. Введение

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, A - положительно-определенный самосопряженный оператор в H, с областью определения $D(A)$. Обозначим через H_γ $(\gamma \geq 0)$ шкалу гильбертовых пространств порожденная оператором A, т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in D(A^\gamma)$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Обозначим через $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и определим линейное множество $D\left(\mathbb{R}^2, H_n\right)$ множество всех вектор-функций $u(t, x)$ со значениями в H_n, бесконечно дифференцируемых с компактными носителями в $\mathbb{R}^2$. Пусть $L_2\left(\mathbb{R}^2; H\right)$ есть гильбертово пространство всех вектор-функций $f(t, x)$ определенные в $\mathbb{R}^2$ почти всюду, со значениями в H, квадратично интегрируемых по Бохнеру в $\mathbb{R}^2$, причем

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2, H)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|f(t, x)\|^2 \, dt dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Предположим, что $n = 2m$ $(m = 1, 2, ...)$ и в $D\left(\mathbb{R}^2, H_n\right)$ введем норму

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2, H)} = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \sum_{k=0}^{n} \left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u(t, x)}{\partial t^j \partial x^k} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}\right)^{1/2}.$$

В пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнении

$$(-1)^m \frac{\partial^n u(t,\, x)}{\partial t^n} + (-1)^m \frac{\partial^n u(t,\, x)}{\partial x^n} + A^n u(x,t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-k-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u(x,t)}{\partial t^j \partial x^k} = f(t,x)\,, (t,\, x) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Здесь производные понимаются в смысле обобщенных функций [1], $f(t,x)$, $u(t,\, x)$ вектор-функции определенные в $\mathbb{R}^2$ почти всюду, со значениями в H, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

1. A- положительно определенный самосопряженный оператор в H;
2. Операторы $iA_{k,j}$ при $k+j=2s$, $s=\overline{0,\, m-1}$, $k,j=\overline{0,n}$ и $A_{k,j}$ при $k+j=2s-1$, $s=\overline{0,\, m-1}$, симметричны в H.

Определение 1. Если при любом $f(t,x) \in L_2\left(\mathbb{R}^2;H\right)$ существует вектор-функция $u(t,x) \in W_2^n\left(\mathbb{R}^2;H\right)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $\mathbb{R}^2$ и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2;H)} \le const\, \|f(t,x)\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}\,,$$

то будем говорить, что уравнение (1) регулярно разрешима.

Регулярно разрешимость уравнения (1) при $n=2$ рассмотрены в работах [2-6], а при $n=4$ в работах [7,8]. В работе [9] найдены условия регулярной разрешимости для уравнения (1). Отметим, что для уравнений зависящих от одного переменного, такие задачи исследуются во многих работах. (см. напр. [10]). Но для уравнения в частных производных разрешимость уравнения (1) исследована сравнительно мало.

В данной работе при выполнение условия 1) и 2) получим теорему о регулярной разрешимости уравнения (1).

Обозначим через

$$P_0 u = P_0\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = (-1)^m \frac{\partial u(t,x)}{\gamma t^n} + (-1)^m \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n} + A^n u(t,x)\,,$$

$$P_1 u = P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{j=0}^{n-k-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u(t,x)}{\partial t^j \partial x^k},$$

и

$$Pu = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = P_0 u + P_1 u, u \in W_2^n\left(\mathbb{R}^2;H\right).$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1) и 2). Тогда оператор $P : W_2^n\left(\mathbb{R}^2;H\right) \to L_2\left(\mathbb{R}^2;H\right)$ есть непрерывный оператор.

Доказательство. Очевидно, что при $u \in W_2^n\left(\mathbb{R}^2; H\right)$

$$\|P_0 u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \left\|(-1)\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + (-1)^m \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + A^n u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq$$

$$\leq 2\left(\left\|\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2,H)} + \left\|\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2,H)} + \|A^n u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2,H)}\right) \leq$$

$$\leq 2\|u\|^2_{W_2^n(\mathbb{R}_+,H)} \qquad (2)$$

С другой стороны

$$\|P_1 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \left\|\sum_{j=0}^{n-k-1}\sum_{k=0}^{n-1} A_{k,j}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^j \partial x^k}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}.$$

Так как операторы $iA_{k,j}$ $(k+j=2s,\ s=\overline{0,m})$ и $A_{k,j}$ $(k+j=2s-1,\ s=\overline{0,m-1})$ симметричны в H и $D\left(A^{n-(k+j)}\right) \subset D\left(A_{k,j}\right)$, $k,j=\overline{0,\,n}$, то это операторы замыкаемые в H и для любого $\varphi \in D\left(A^{n-(k+j)}\right)$

$$\|A_{k,j}\varphi\| \leq const\left\|A^{n-(k+j)}\varphi\right\|,$$

т.е. операторы $A_{k,j}A^{(k+j)-n}$, $k,j=\overline{0,n}$ ограничены в H.

Тогда

$$\left\|A_{k,j}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^j \partial x^k}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2,H)} = \left\|A_{k,j}A^{(k+j)-n}\right\|\left\|A^{n-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^j \partial x^k}\right\|_{L_2\left(\mathbb{R}^{2^2},H\right)} \leq$$

$$\leq const\left\|A^{n-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^j \partial x^k}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2,H)}$$

Отсюда получаем, что

$$\|P_1 u\|_{L_2\left(\mathbb{R}^2_+,H\right)} \leq const\|u\|_{L_2\left(\mathbb{R}^2_+,H\right)} \qquad (3)$$

Из неравенства (2) и (3) следует утверждение леммы.

Для получения теоремы о регулярной разрешимости уравнения (1) важную роль играет следующая теорема об оценке резольвенты на мнимых осях.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1) и 2). Тогда при $(\xi,\,n) \in \mathbb{R}^2$ существует резольвента $P^{-1}(i\xi,\,i\eta)$, причем имеет место оценка

$$\sum_{j=0}^{n}(1+|\xi|+|\eta|)^j\left\|A^{n-j}P^{-1}(i\xi,\,i\eta)\right\| \leq const.$$

Доказательство. Пусть вектор $\varphi \in H_n$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Тогда очевидно, что из условия (2) следует, что число

$$(P_1(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi) = \sum_{j=0}^{n-k-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(A_{k,j}(i\xi)^j(i\eta)^k\varphi, \varphi\Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1}\sum_{k=0}^{n-1} i^{k+j}\xi^j\eta^k (A_{k,j}\varphi, \varphi)$$

будет чисто мнимое. Поэтому при $\varphi \in H_n$

$$|P(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi| = |P_0(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi + P_1(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi| \geq$$

$$\geq |P_0(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi| \tag{4}$$

С другой стороны $(n = 2m, \quad m = 1, 2, ...)$

$$(P_0(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi) = \big((\xi^n E + \eta^n E + A^{2m})\varphi, \varphi\big) \geq$$

$$\geq (\xi^n + \eta^n + \mu_0^n)\|\varphi\|^2.$$

Здесь μ_0 есть нижняя граница спектра оператора A. Тогда из неравенства (4) следует, что при $(\xi, n) \in \mathbb{R}^2$ и $\varphi \in H_n$

$$\|(P(i\xi, i\eta)\varphi\|, \|\varphi\|) \geq (\xi^n + \eta^n + \mu_0^n)\|\varphi\|^2.$$

Отсюда имеем, что $P^{-1}(i\xi, i\eta)$ существует при $(\xi, n) \in \mathbb{R}^2$ и из неравенства

$$\|P(i\xi, i\eta)\varphi\|\,\|\varphi\| \geq |P(i\xi, i\eta)\varphi, \varphi| \geq (\xi^n + \eta^n + \mu_0^n)\|\varphi\|^2$$

следует, что

$$\|P(i\xi, i\eta)\varphi\| \geq (\xi^n + \eta^n + \mu_0^n)\|\varphi\|$$

т.е.

$$\left\|P^{-1}(i\xi, i\eta)\right\| \leq (\xi^n + \eta^n + \mu_0^n)^{-1} \tag{5}$$

Отсюда имеем, что

$$(1 + \xi^n + \eta^n)\left\|P^{-1}(i\xi, i\eta)\right\| \leq const \tag{6}$$

Теперь покажем, что

$$\left\|A^n P^{-1}(i\xi, i\eta)\right\| \leq const.$$

Пусть $\psi \in H_0 = H$. Тогда очевидно, что $A^{-n}\psi \in H_n$. Поэтому при $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|P(i\xi, i\eta)A^{-n}\psi, A^{-n}\psi\right| \geq \left(P_0(i\xi, i\eta)A^{-n}\psi, A^{-n}\psi\right) =$$

$$= \left((\xi^n + \eta^n + A^n)A^{-n}\psi, A^{-n}\psi\right) = (\xi^n + \eta^n)\left\|A^{-n}\psi\right\|^2 + \left(\psi, A^{-n}\psi\right). \tag{7}$$

Следовательно при $\psi \in H$, $(\xi,\, \eta) \in \mathbb{R}^2$

$$\left(\psi,\, A^{-n}\psi\right) \leq \left\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\psi,\, A^{-n}\psi\right\| \leq$$

$$\leq \left\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\psi,\, A^{-n}\psi\right\| \leq \left\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\psi\right\| \left\|A^{-n}\psi\right\| \leq$$

$$\leq \left\|A^{-n}\right\| \|\psi\| \left\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\psi\right\|$$

Отсюда имеем, что

$$\sup_{\|\psi\|=1} \left(\psi,\, A^{-n}\psi\right) \leq \left\|A^{-n}\right\| \sup_{\|\psi\|=1} \left\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\psi\right\| \tag{8}$$

Так как, $\sup\limits_{\|\psi\|=1} (\psi,\, A^{-n}\psi) = \|A^{-n}\|$, то из неравентсва (7) получаем, что

$$\left\|A^{-n}\right\| \leq \left\|A^{-n}\right\| \left\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\right\|,$$

т.е. $\|P\left(i\xi,\, i\eta\right) A^{-n}\| \geq 1$.

Тогда

$$\left\|A^{n} P^{-1}\left(i\xi,\, i\eta\right)\right\| \leq 1 \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (1 + |\xi| + |\eta|)^{j} \left\|A^{n-j} P^{-1}\left(i\xi,\, i\eta\right)\right\| \leq const.$$

Очевидно, что при $j \neq 0$ и $j \neq n$ используя неравенство (5) имеем

$$\left\|(1 + |\xi| + |\eta|)^{j n-j} P^{-1}\left(i\xi,\, i\eta\right) \psi\right\| =$$

$$= \left\|(1 + |\xi| + |\tau|)^{j} A^{n-j} \left(|\xi|^{n} + |\eta|^{n} + A^{n}\right)^{-1} \times\right.$$

$$\left.\times \left(|\xi|^{n} + |\eta|^{n} + A^{n}\right) P^{-1}\left(i\xi,\, i\eta\right) \psi\right\| \leq$$

$$\leq \left\|(1 + |\xi| + |\tau|)^{j} A^{n-j} \left(|\xi|^{n} + |\eta|^{n} + A^{n}\right)\right\| const \left\|\psi\right\|.$$

С другой стороны

$$\left\|(1 + |\xi| + |\tau|)^{j} A^{n-j} \left(|\xi|^{n} + |\eta|^{n} + A^{n}\right)^{-1} =\right.$$

$$= \sup_{\mu \in \tau(A)} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{|\xi|}{\mu} + \frac{|\tau|}{\mu}\right)^{j} \left(\left|\frac{\xi}{\mu}\right|^{n} + \left|\frac{\eta}{\mu}\right|^{n} + 1\right)^{-1} \leq const.$$

Таким образом, Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, докажем основную теорему

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1) и 2) . Тогда уравнение (1) регулярно разрешима.

Доказательство. По теореме 1 при $(\xi,\,\eta)\in\mathbb{R}^2$ резольвента $P^{-1}(i\xi,\,i\eta)$ существует. Тогда обозначим, через

$$u(t,\,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\hat{u}(\xi,\,\eta)\,e^{i\xi t+i\eta x}d\xi d\eta,$$

где $\hat{u}(\xi,\,\eta)=P^{-1}(i\xi,\,i\eta)\,\hat{f}(\xi,\,\eta)$.

Здесь $\hat{f}(\xi,\,\eta)$ есть преобразование Фурье функции $f(t,\,x)$. Очевидно, что $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $\mathbb{R}^2$. Покажем, что $u(t,x)\in W_2^n\left(\mathbb{R}^2,H\right)$. По теореме Планшареля

$$\|u\|^2_{W_2^n(\mathbb{R}^2;H)}=\left\|\left(\xi^{2n}+\eta^{2n}\right)\right\|\hat{u}(\xi,\,\eta)^2_{L_2(\mathbb{R}^2,H)}+\|A\hat{u}(\xi,\eta)\|^2+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-k-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|A^{n-(k+j)}\xi^j\eta^k\hat{u}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}(L_2(\mathbb{R}^2;H))=$$

$$=\left\|\left(\xi^{2n}+\eta^{2n}+A^{2n}\right)P^{-1}(i\xi,i\eta)\,\hat{f}(\xi,\eta)\right\|^2_{(}L_2(\mathbb{R}^2;H)) \tag{10}$$

По теореме 1

$$\left\|\left(\xi^n+\eta^n+A^n\right)P^{-1}(i\xi,i\eta)\,\hat{f}(\xi,\eta)\right\|\le const$$

и

$$\left\|A^{n-(k+j)}\xi^j\eta^kP^{-1}(i\xi,i\eta)\right\|\le(1+|\xi|+|\eta|)^{k+j}\left\|A^{n-(k+j)}P^{-1}(i\xi,i\eta)\right\|\le const.$$

Тогда из неравенства (10) получаем, что

$$\|u(t,x)\|^2_{W_2^n(\mathbb{R}^2;H)}\le const\,\|f(t,x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}.$$

Следовательно, $u(t,\,x)\in W_2^n\left(\mathbb{R}^2;H\right)$ и уравнение (1) регулярно разрешима.

Автор выражает благодарность проф. С.С. Мирзоеву за ценные советы.

Список литературы

[1] Ж.Л. Лионс, Э.Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 241 с.

[2] Мирзоев С.С. Об одной краевой задаче для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка, Труды АН Азербайджана, 1998, т.7(16), с. 154-161

[3] Mirzoyev S.S., Jafarov I.J. On Solvability of One Boundary Value Problem for Second Order Operator Differential Equation, Transaction of NAS of Azerbaijan ser. of phus. tech. and math sciences , 2004, v.24, N.1, 177-186

[4] Jafarov I.J. On Solvability of One Class of Partial Operator-Differential Equationњ Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2004, N1, pp. 136-146

[5] Мирзоев С.С., Джафаров И.Дж. О разрешимости одной краевой задачи для оператор- но-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, Матема- тические заметки, 2012, т.91, No3, с. 470-472

[6] Ягубова Х.В. Об условиях разрешимости операторно-дифференциального уравнения в частных производных, Вестник Бакинского Университета, сер.физ.матем.наук, 1998, N3, с.94-101

[7] Ismailova M.F. On the solvability of one class of fourth order elliptic type operator–differential equations // Proceedings IMM of NAS of Azerbaijan, 2005, v.23, p.53 – 58.

[8] Мирзоев С.С., Исмаилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка в гильбертовом пространст- ве // Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-матем.наук, 2006, No. 4, с.5-11.

[9] С.С.Мирзоев, Н.М.Сулейманов, О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений в частных производных, Вестник БГУ, Сер. Физ. Мат. Наук, 2015, No. 2, с.5-12

[10] Мирзоев С.С "Вопросы разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений и некоторые спектральные задачи"автореферат докторской диссертации, 1993, Баку, 32 с.

Н.М.Сулейманов
Бакинский Государственный Университет
E-mail:

Received
Accepted