

# Теоремы Тауберова Типа для Рядов Фурье-Гегенбауэра

Фархад З. Велиев

---

**Аннотация.** В данной статье устанавливается равномерная сходимость рядов Фурье-Гегенбауэра к функции  $f \in C[-1; 1]$ , а также почти всюду сходимость к  $f \in L_{1,\lambda}$ . Полученные результаты являются некоторым усилением результатов полученных в работе [1].

**Key Words and Phrases:** ряды Фурье-Гегенбауэра, равномерная сходимость, функция обобщенного сдвига, многочлен наилучшего приближения.

**2010 Mathematics Subject Classifications:** 40E05, 42A20

---

## 1. Введение

Обозначим через  $C[-1; 1]$  класс непрерывных функций на отрезке  $[-1; 1]$ , а через  $L_{p,\lambda}[-1; 1]$  - пространство функций суммируемых с  $p$ -ой степенью по весу  $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$  соответственно с нормами  $\|f\|_C = \max_{x \in [-1; 1]} |f(x)|$ ,

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left( \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть  $X$  одно из пространств  $C$  или  $L_{p,\lambda}$ .

Функции  $f \in X$  поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\lambda(f) P_n^{(\lambda)}(x) \quad (1)$$

по многочленам Гегенбауэра  $P_n^{(\lambda)}(x)$ , которые образуют ортогональную систему на отрезке  $[-1; 1]$  с весом  $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ ,  $\lambda > 0$ .

Сумма первых  $n$ - членов ряда (1) можно представить в виде (см. [4], с.20)

$$S_n^{(\lambda)}(f; x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2\lambda} t A_t f(x) K_n^{(\lambda)}(\cos t) dt$$

где  $K_n^{(\lambda)}(\cos t) = \sum_{\nu=0}^n (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t)$ , а

---

$$A_t f(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda)} \int_0^\pi (\sin \varphi)^{2\lambda-1} f(x \cos t + \sqrt{1-x^2} \sin t \cos \varphi) d\varphi$$

есть функция обобщенного сдвига (см. [8]).

Пусть  $H_n$ - множество алгебраических полиномов, а  $E_n(f)_x$ - наилучшее приближение функции  $f \in X$ , то есть,  $E_n(f)_x = \inf_{T_n \in H_n} \|f - T_n\|_x$ .

Из результатов работы [1] следует, что условие  $n^\lambda E_n(f)_C \rightarrow 0$  влечет за собой равномерную сходимость ряда (1) к функции  $f \in C$ .

В настоящей работе этот результат усиливается заменой  $E_n(f)_C$  на  $E_n(f)_{L_p}$ .

## 2. Основные результаты

**Определение.** Функция  $f \in X$  называется медленно колеблющейся, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие, зависящие от  $\varepsilon$  числа  $\alpha(\varepsilon)$  и  $\gamma(\varepsilon)$ , что для всех  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих условию  $\alpha(\varepsilon) < x < y < \gamma(\varepsilon)$ , справедливо неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**Лемма 1.** Пусть  $f \in C$ . Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2\lambda+1}{p}} E_n(f)_{L_p} < \infty, \quad 1 \leq p < 2 + \frac{1}{\lambda};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\lambda (\ln n)^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}} E_n(f)_{L_p} = 0, \quad p = 2 + \frac{1}{\lambda};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\lambda E_n(f)_{L_p} = 0, \quad p > 2 + \frac{1}{\lambda};$$

то функция  $S_{[t]}(f)$  является медленно колеблющейся в  $C$  функцией.

Пусть  $Q_n(x)$ - многочлен наилучшего приближения функции  $f$  в метрике  $L_{p,\lambda}$ , тогда с учетом равенства  $S_\nu \{Q_n(x)\} = Q_n(x)$ ,  $\nu = n, n+1, \dots$ , получим

$$\begin{aligned} \left| S_m^{(\lambda)}(t) - S_n^{(\lambda)}(f) \right| &= \left| S_m^{(\lambda)}(f - Q_n) - S_n^{(\lambda)}(f - Q_n) \right| = \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left| \int_0^\pi \sin^{2\lambda} t A_t(f - Q_n)(x) \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) dt \right|. \end{aligned}$$

Поскольку [4]  $\|A_t f\|_{p,\lambda} \leq \|f\|_{p,\lambda}$ , то по неравенству Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \left| S_m^{(\lambda)}(f) - S_n^{(\lambda)}(f) \right| &\leq E_n(f)_{L_p} \left( \int_0^\pi \sin^{2\lambda} t \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= E_n(f)_{L_p} \cdot J = E_n(f)_{L_p} \left( \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} + \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\frac{\pi}{m-n}} + \int_{\frac{\pi}{m-n}}^\pi \right)^{\frac{1}{q}} = E_n(f)_{L_p} (J_1 + J_2 + J_3)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая неравенства ([9], с.178-179)

$$P_n^{(\lambda)}(\cos t) = O(1) n^{2\lambda-1}, \quad \lambda > 0, \quad t \in [0; \pi] \text{ и}$$

$$\sin^\lambda t \left| P_n^{(\lambda)}(\cos t) \right| < 2^{1-\lambda} \frac{n^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad t \in [0; \pi]$$

получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} t \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) \right|^q dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} t \left( \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) \left| P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) \right| \right)^q dt = \\ &= O(1) \begin{cases} (m-n)^q m^{\lambda q} \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} t^{\lambda(2-q)} dt, & 1 \leq q < 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ (m-n)^q m^{2\lambda q} \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} t^{2\lambda} dt, & q \geq 2 + \frac{1}{\lambda}; \end{cases} = \\ &= O(1) \begin{cases} (m-n)^{q-1-\lambda(2-q)} m^{\lambda q}, & 1 \leq q < 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ (m-n)^{q-2\lambda-1} m^{2\lambda q}, & q \geq 2 + \frac{1}{\lambda} \end{cases} = \\ &= O(1) \begin{cases} m^{\lambda q}, & 1 \leq q \leq \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}; \\ m^{\lambda q} (m-n)^{(1+\lambda)q-1-2\lambda}, & \frac{2+2\lambda}{1+\lambda} < q < 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ m^{2\lambda q} (m-n)^{q-2\lambda-1}, & q \geq 2 + \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Используя оценку ([6], с.265)

$$\sin \frac{t}{2} \sin^\lambda t \left| \sum_{\nu=0}^n (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) \right| = O(n^\lambda), \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \text{получим}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} t \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) \right|^q dt = \\ &= \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} t \left| \left( \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} \right) \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos t) \right|^q dt = \\ &= O(1) m^{\lambda q} \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} t \left( \frac{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \sin^\lambda \frac{t}{2} \cos^\lambda \frac{t}{2}} \right)^q dt = \\ &= O(1) m^{\lambda q} \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \frac{\sin^{2\lambda} t}{\left( \sin \frac{t}{2} \right)^{(\lambda+1)q}} dt + O(1) m^{\lambda q} \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} t \frac{\left( \sin \frac{t}{2} \right)^{(1-\lambda)q}}{\left( \cos \frac{t}{2} \right)^{\lambda q}} dt = \\ &= O(1) m^{\lambda q} \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} t^{2\lambda - (\lambda+1)q} dt + O(1) m^{\lambda q} \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \frac{\left( \sin \frac{t}{2} \right)^{2\lambda + (1-\lambda)q}}{\left( \cos \frac{t}{2} \right)^{\lambda q - 2\lambda}} dt = \\ &= O(1) m^{\lambda q} \begin{cases} 1, & 1 \leq q < \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ \ln(m-n), & q = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ (m-n)^{(\lambda+1)q-2\lambda-1}, & q > \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} \end{cases} + O(1) m^{\lambda q} \int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\pi - \frac{\pi}{m-n}} \frac{dt}{\left( \cos \frac{t}{2} \right)^{\lambda(q-2)}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1)m^{\lambda q} \begin{cases} 1, & 1 \leq q < \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ \ln(m-n), & q = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ (m-n)^{(\lambda+1)q-2\lambda-1}, & q > \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} \end{cases} \\
&\quad + O(1)m^{\lambda q} \begin{cases} 1, & 1 \leq q \leq 2 \\ (m-n)^{\lambda(q-2)}, & q > 2 \end{cases} = \\
&= O(1)m^{\lambda q} \begin{cases} 1, & 1 \leq q < \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ \ln(m-n), & q = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ (m-n)^{(\lambda+1)q-2\lambda-1}, & q > \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} \end{cases} \quad (4)
\end{aligned}$$

поскольку  $q \geq 1$ , то  $\lambda(q-2) \leq (\lambda+1)q-2\lambda-1$ .

Теперь рассмотрим интеграл  $J_3$  (при условии  $t = \pi - x$ ).

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{\pi - \frac{\pi}{m-n}}^{\pi} \sin^{2\lambda} t \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_{\nu}^{(\lambda)}(\cos t) \right|^q dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} x \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_{\nu}^{(\lambda)}(-\cos x) \right|^q dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} x \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) (-1)^{\nu} P_{\nu}^{(\lambda)}(\cos x) \right|^q dx \leq \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{m-n}} \sin^{2\lambda} x \left( \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_{\nu}^{(\lambda)}(\cos x) \right)^q dx.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для  $J_3$  справедливы оценки (3). Учитывая (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
J &= \left( \int_0^{\pi} \sin^{2\lambda} t \left| \sum_{\nu=n+1}^m (\nu + \lambda) P_{\nu}^{(\lambda)}(\cos t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= O(1) \begin{cases} m^{\lambda}, & 1 \leq q < \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ m^{\lambda} \ln^{\frac{1}{q}}(m-n), & q = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ m^{\lambda} (m-n)^{\lambda+1-\frac{2\lambda+1}{q}}, & \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} < q < 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ m^{2\lambda} (m-n)^{1-\frac{2\lambda+1}{q}}, & q \geq 2 + \frac{1}{\lambda}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Если здесь принять  $m = n + [n\varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , то получим

$$J = O(1) \begin{cases} n^{\lambda}, & 1 \leq q < \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ n^{\lambda} (\ln n)^{\frac{1}{q}}, & q = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ n^{\lambda} (n\varepsilon)^{\lambda+1-\frac{2\lambda+1}{q}}, & \frac{2\lambda+1}{1+\lambda} < q < 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ n^{2\lambda} (n\varepsilon)^{1-\frac{2\lambda+1}{q}}, & q \geq 2 + \frac{1}{\lambda}. \end{cases} =$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \begin{cases} n^\lambda, & 1 \leq q < \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ n^\lambda (\ln n)^{\frac{1}{q}}, & q = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}; \\ n^{(2\lambda+1)(1-\frac{1}{q})} \cdot \varepsilon^{\lambda+1-\frac{2\lambda+1}{q}}, & \frac{2\lambda+1}{1+\lambda} < q; \end{cases} = \\
&= O(1) \begin{cases} n^\lambda, & p > 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ n^\lambda (\ln n)^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}}, & p = 2 + \frac{1}{\lambda}; \\ n^{\frac{2\lambda+1}{p}} \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda}{p}(2+\frac{1}{\lambda}-p)}, & 1 \leq p < 2 + \frac{1}{\lambda}. \end{cases} \quad (5)
\end{aligned}$$

Учитывая (5) в (2), получим утверждение леммы.

**Теорема 1.** При условиях Леммы 1 ряд (1) равномерно сходится к функции  $f(x)$ .

Из результатов работы [7] следует  $(C, 1)$ -суммируемость рядов Фурье-Гегенбауэра.

Согласно одной из теорем тауберова типа ([3], [4]), если ряд суммируем  $(C, 1)$ , а  $S_{[t]}(t)$  - медленно колеблющаяся функция, что следует из Леммы 1, то ряд (1) равномерно сходится к функции  $f(x)$ .

Средние Абеля-Пуассона ряда (1) имеет вид

$$P_r^{(\lambda)}(f; x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(1-r^2)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{\sin^{2\lambda} t A_t f(x)}{(1-2r \cos t + r^2)^{\lambda+1}} dt.$$

Справедлива (см. [5])

**Лемма 2.** Для любого  $0 < r < 1$  справедливо неравенство

$$P_r^{(\lambda)}(f; x) - f(x) = O(1) (1-r) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]} W_f\left(x; \frac{\pi}{\nu}\right),$$

где  $W_f(x; \delta) = \sup_{0 < t \leq \delta} \frac{1}{t^{2\lambda+1}} \int_0^t |A_t f(x) - f(x)| \sin^{2\lambda} t dt$ .

**Следствие.** Почти для всех  $x \in [-1; 1]$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} P_r^{(\lambda)}(f; x) = f(x).$$

Действительно, как показано в работе [2] почти для всех  $x \in [-1; 1]$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{1-r} |A_t f(x) - f(x)| \sin^{2\lambda} t dt = 0.$$

Но тогда  $W_f(x; \delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , и поскольку  $1-r \leq \left[\frac{1}{1-r}\right]$ , то

$$P_r^{(\lambda)}(f; x) - f(x) = O(1) \left[\frac{1}{1-r}\right] \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]} W_f\left(x; \frac{\pi}{\nu}\right) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 1-0$$

согласно классическому результату Коши: если  $S_\nu \rightarrow S$ , то  $\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n S_\nu \rightarrow S$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L_{1,\lambda}$ . Тогда при условиях Леммы 1 почти всюду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(\lambda)}(f; x) = f(x) \quad (6)$$

Действительно, из условий Леммы 1 следует, что  $S_{[t]}(f)$  - медленно колеблющаяся функция. Из следствия Леммы 2 вытекает суммируемость ряда (1) по Абелю. Тогда согласно Теореме 1.3.5 из [10] следует (6).

### Список литературы

- [1] Агаханов С.А., Натансон Г.И. Отклонение суммы Фурье-Якоби в граничных точках промежутка ортогональности // Вести. ЛУ, No 7, 1968, с. 15-27.
- [2] Джамалов М.Ш. Об одном обобщении понятия "Точка Лебега" // Деп. ВИНТИ, No 4284-82, 1982, 24 с.
- [3] Жук В.В. Структурные свойства функций и точность аппроксимации. Л. 1984.
- [4] Ibrahimov E.J. On Fourier coefficient of some classes of functions and their applications in approximation theory // Commentationes Mathematicae, **54** (2), (2014), p. 209-246.
- [5] Ибрагимов Э.Дж., Асадов Ш.М. Об одной локальной теореме порядка сходимости на сфере обобщенного оператора Пуассона // Учен. зап. АГУ, сер. физика и математика.
- [6] Kogbetliants E. Sur la sommabilite de le serie ultraspherique a einterieur de eirtervalle (-1;1) par la methode des moyennes arithetiques // Bull. Soc. Math. de France., (1923), p. 244-295.
- [7] Кальней С.Г. Равномерная ограниченность многочленов по полиномам Якоби в метрике  $L$  // Докл. АН СССР, т. **222**, No 5, 1975, с. 1024-1027.
- [8] Потапов М.К. О приближении многочленами Якоби // Вестник МГУ, сер. математика и механика, 1977, No 5, с. 70-82.
- [9] Сеге Г. Ортогональные многочлены. ФМ, М. 1962.
- [10] Еопурия С.Б. Суммирование методом Абеля продифференцированного ряда Фурье-Лапласа // Труды Груз. политех. ин-та, 1971, т. **147**, No 7.

Фархад З. Велиев

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,  
кафедра общей и прикладной математики*

*Азербайджан, AZ1010, г. Баку, проспект Азадлыг, 20*

*E-mail:*

Received 01 November 2016

Accepted 28 November 2016