Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 4, No 2, 2014, December
ISSN 2222-5498

Оценка А.Зигмунда для одного класса поверхностных сингулярных интегралов

Э. Г. Халилов

Аннотация. Доказана оценка А.Зигмунда для производной акустического потенциала двойного слоя.

Ключевые слова: оценка А.Зигмунда, производная акустического потенциала двойного слоя, поверхностный сингулярный интеграл.

2000 Mathematics Subject Classifications: 35J05, 45E05, 31B10

Известно, что краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и др. (см. [1]) приводятся к сингулярному интегральному уравнению, зависящему от нормальной производной акустического потенциала двойного слоя

$$W_{k,\rho}(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x,\, y)}{\partial \vec{n}(y)}\, \rho(y) dS_y, \quad x \in S, \tag{1}$$

где $S \subset \mathbb{R}^3$ - поверхность Ляпунова, $\vec{n}(y)$- внешняя единичная нормаль в точке $y \in S$, $\Phi_k(x,\, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, x \neq y$ - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, k - волновое число, причем $Imk \geq 0$, а $\rho(y)$- непрерывно дифференцируемая функция на S. Поэтому возникает интерес к изучению некоторых основных свойств оператора $(A\rho)\ (x) = grad\, W_{k,\rho}(x),\ \ x \in S$, в обобщенных пространствах Гельдера. А для этого, как известно, сначала надо доказать оценку типа А.Зигмунда для производной акустического потенциала двойного слоя, к чему посвящена настоящая работа.

Для непрерывной на S векторной функции $\varphi\,(x)$ вводим модуль непрерывности вида $\omega\ (\varphi,\, \delta) = \delta \sup\limits_{\tau \geq \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau},\ \ \delta > 0$, где $\bar{\omega}(\varphi,\, \tau) = \max\limits_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x,\, y \in S}} |\varphi\,(x) - \varphi\,(y)|$.

Построенные Гюнтером (см.[2]) контрпримеры показывают, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производные, вообще говоря, не существуют. Однако в работе [3] показано, что если S- поверхность Ляпунова, а $\rho(x)$- непрерывно дифференцируемая функция на S и $\int_0^{diam\, S} \frac{\omega(grad\rho,\, t)}{t} dt < +\infty$, то акустический потенциал двойного слоя $W_{k,\rho}(x)$ имеет на S непрерывную производную и дана формула для вычисления производной акустического потенциала двойного слоя.

Теорема. *Пусть S- поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \le 1$, $\rho(x)$- непрерывно дифференцируемая функция на S и $\int_0^{diam\,S} \frac{\omega(grad\rho,\,t)}{t} dt < +\infty$. Тогда акустический потенциал двойного слоя имеет непрерывную производную, причем справедлива следующая оценка:*

$\omega\left(gradW_{k,\rho}, h\right) \le M_\rho \left(h^\alpha + \omega\left(grad\rho, h\right) + \int_o^h \frac{\omega(grad\rho,t)}{t} dt + h \int_h^{diamS} \frac{\omega(grad\rho,t)}{t^2} dt \right)$ *при* $0 < \alpha < 1$,

$\omega\left(gradW_{k,\rho}, h\right) \le M_\rho \left(h \left|\ln h\right| + \omega\left(grad\rho, h\right) + \int_o^h \frac{\omega(grad\rho,t)}{t} dt + h \int_h^{diamS} \frac{\omega(grad\rho,t)}{t^2} dt \right)$ *при* $\alpha = 1$,

где M_ρ- положительная постоянная, зависящая лишь от S, k и ρ.

Доказательство. В работе [3] доказано, что акустический потенциал двойного слоя имеет непрерывную производную, причем

$$gradW_{k,\rho}(x) = \int_S grad_x \left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x,y) - \Phi_0(x,y)\right)}{\partial \vec{n}(y)} \right) \rho(y) dS_y -$$

$$- \frac{3}{4\pi} \int_S \frac{\left(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y)\right)\, \overrightarrow{xy}}{\left|x-y\right|^5} \left(\rho(y) - \rho(x)\right) dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\rho(y) - \rho(x)}{\left|x-y\right|^3} \vec{n}(y) dS_y, \quad x \in S. \tag{2}$$

Слагаемые в равенстве (2) обозначим через $L\left(x\right)$, $F\left(x\right)$ и $G\left(x\right)$, соответственно.

Возьмем любые точки $x', x'' \in S$ такие, чтобы величина $h = \left|x' - x''\right|$ была достаточно малой. Тогда

$$gradW_{k,\,\rho}(x') - gradW_{k,\,\rho}(x'') =$$

$$= \left[L\left(x'\right) - L\left(x''\right)\right] + \left[F\left(x'\right) - F\left(x''\right)\right] + \left[G\left(x'\right) - G\left(x''\right)\right]. \tag{3}$$

Так как интегралы $L(x)$ и $F(x)$ являются слабо сингулярными, то нетрудно доказать, что

$$\left|L\left(x'\right) - L\left(x''\right)\right| \le M^{*} h \left|\ln h\right| \left\|\rho\right\|_\infty \tag{4}$$

и

$$\left|F\left(x'\right) - F\left(x''\right)\right| \le M\left(h \left\|\rho\right\|_\infty + h^\alpha \left\|grad\rho\right\|_\infty\right) \text{ при } 0 < \alpha < 1,$$

$$\left|F\left(x'\right) - F\left(x''\right)\right| \le M\left(h \left\|\rho\right\|_\infty + h \left|\ln h\right| \left\|grad\rho\right\|_\infty\right) \text{ при } \alpha = 1. \tag{5}$$

Теперь оценим выражение $G\left(x'\right) - G\left(x''\right)$. Очевидно, что существуют точки $\tilde{y}' = x' + \theta'\left(y - x'\right)$ и $\tilde{y}'' = x'' + \theta''\left(y - x''\right)$ такие, что $\rho(y) - \rho(x') = \left(grad\rho(\tilde{y}'), \overrightarrow{x'y}\right)$ и $\rho(y) - \rho(x'') = \left(grad\rho(\tilde{y}''), \overrightarrow{x''y}\right)$. Тогда выражение $G\left(x'\right) - G\left(x''\right)$ можно представить в следующем виде:

$$G\left(x'\right) - G\left(x''\right) = \frac{1}{4\pi} \int_{S \setminus S_d(x')} \left(\frac{\rho(y) - \rho(x')}{\left|x'-y\right|^3} - \frac{\rho(y) - \rho(x'')}{\left|x''-y\right|^3} \right) \vec{n}(y) dS_y +$$

---

[*] Здесь и далее через M обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_{h/2}(x')}\left[\frac{(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}+\frac{(grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\left(\vec{n}(y)-\vec{n}(x')\right)\right]\vec{n}(y)dS_y-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{S_{h/2}(x'')}\left[\frac{(grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}\left(\vec{n}(y)-\vec{n}(x'')\right)+\frac{(grad\rho(\tilde{y}'')-grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}\right]\vec{n}(y)dS_y-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{S_{h/2}(x')}\left[\frac{(grad\rho(\tilde{y}'')-grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}+\frac{(grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}\left(\vec{n}(y)-\vec{n}(x'')\right)\right]dS_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_{h/2}(x'')}\left[\frac{(grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\left(\vec{n}(y)-\vec{n}(x')\right)+\frac{(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\right]dS_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_d(x')\setminus(S_{h/2}(x')\bigcup S_{h/2}(x''))}\Big\{\,(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x'y})\cdot\left(\frac{1}{|x'-y|^3}-\frac{1}{|x''-y|^3}\right)\cdot\vec{n}(y)+$$

$$+\frac{1}{|x''-y|^3}\left[(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(\tilde{y}''),\,\overrightarrow{x'y})\,+\,(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'x''})\right]\vec{n}(y)+$$

$$+\frac{n\left(y\right)-n\left(x'\right)}{|x'-y|^3}\left(grad\rho\left(x''\right)-grad\rho\left(x'\right),x'y\right)+(grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x''y})\left(\vec{n}(y)-\vec{n}(x'')\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{|x'-y|^3}-\frac{1}{|x''-y|^3}\right)+\left((grad\rho(x')-grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x'y})+\right.$$

$$\left.+(grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x'x''})\right)\frac{\vec{n}(y)-\vec{n}(x'')}{|x'-y|^3}\Big\}\,dS_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_d(x')}\frac{(grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\left(\vec{n}(x')-\vec{n}(x'')\right)dS_y+$$

$$+\frac{n\left(x'\right)}{4\pi}\int_{S_d(x')\setminus(S_{h/2}(x')\bigcup S_{h/2}(x''))}\frac{\left(grad\rho\left(x''\right)-grad\rho\left(x'\right),x'y\right)}{|x'-y|^3}dS_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_d(x')\setminus(S_{h/2}(x')\bigcup S_{h/2}(x''))}\frac{(grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\left(\vec{n}(x'')-\vec{n}(x')\right)dS_y+$$

$$+\frac{\vec{n}(x'')}{4\pi}\int_{S_d(x')}\left[\frac{(grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}-\frac{(grad\rho(x''),\,\overrightarrow{x''y})}{|x''-y|^3}\right]dS_y,$$

где d- радиус стандартной сферы для S, а $S_d(x)=\{\,y\in S:\;\;|y-x|<d\,\}$.

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $G_i(x',\,x'')$, $i=\overline{1,10}$, соответственно. Очевидно, что

$$\left|G_1(x',\,x'')\right|\le M\,h\,\|\rho\|_\infty\,,$$

$$\left|G_2(x',\,x'')\right|\le M\,\left(\int_0^h\frac{\omega(grad\rho,\,t)}{t}dt+h^\alpha\,\|grad\rho\|_\infty\right)$$

и

$$\left|G_3(x',\,x'')\right|\le M\,\left(\int_0^h\frac{\omega(grad\rho,\,t)}{t}dt+h^\alpha\,\|grad\rho\|_\infty\right).$$

Кроме того, принимая во внимание $h/2\le|y-x''|\le 3h/2,\quad\forall\,y\in S_{h/2}(x')$, имеем:

$$\left|G_4(x',\,x'')\right|\le M\frac{\omega\left(grad\rho,\,3h/2\right)+(3h/2)^\alpha}{(3h/2)^2}mesS_{h/2}\left(x'\right)\le M\,\left(h^\alpha+\omega\left(grad\rho,h\right)\right).$$

Учитывая, что $h/2\le|y-x'|\le 3h/2,\quad\forall\,y\in S_{h/2}(x'')$, находим

$$\left|G_5(x',\,x'')\right|\le M\,\left(h^\alpha+\omega\left(grad\rho,h\right)\right).$$

Так как существует точка $\tilde{x}=x'+\tilde{\theta}\left(x''-x'\right)$ такая, что $\rho(x'')-\rho(x')=(grad\rho(\tilde{x}),\,\overrightarrow{x'x''})$, то $(grad\rho(\tilde{x}),\,\overrightarrow{x'x''})=\rho(x'')-\rho(x')=\left(\rho\left(y\right)-\rho\left(x'\right)\right)-\left(\rho\left(y\right)-\rho\left(x''\right)\right)=(grad\rho(\tilde{y}'),\,\overrightarrow{x'y})-(grad\rho(\tilde{y}''),\,\overrightarrow{x''y})=(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(\tilde{y}''),\,\overrightarrow{x'y})+(grad\rho(\tilde{y}''),\,\overrightarrow{x'x''})$, а, значит,

$$(grad\rho(\tilde{y}')-grad\rho(\tilde{y}''),\,\overrightarrow{x'y})=(grad\rho(\tilde{x})-grad\rho(\tilde{y}''),\,\overrightarrow{x'x''}).$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\left|\frac{1}{|x'-y|^3}-\frac{1}{|x''-y|^3}\right|\le\frac{M\,h}{|x'-y|^4},\;\;y\in S_d\left(x'\right)\setminus\left(S_{h/2}\left(x'\right)\bigcup S_{h/2}\left(x''\right)\right),$$

получаем, что

$|G_6(x',\,x'')|\le M\,\left(h\,\int_h^d\frac{\omega(grad\rho,\,t)}{t^2}dt+h^\alpha\,\|grad\rho\|_\infty+\omega\left(grad\rho,h\right)\right)$ при $0<\alpha<1$,

$|G_6(x',\,x'')|\le M\,\left(h\,\int_h^d\frac{\omega(grad\rho,\,t)}{t^2}dt+h\,|\ln h|\,\|grad\rho\|_\infty+\omega\left(grad\rho,h\right)\right)$ при $\alpha=1$.

Так как интеграл $\int_{S_d(x')}\frac{(grad\rho(x'),\,\overrightarrow{x'y})}{|x'-y|^3}\,dS_y$ сходится в смысле главного значения Коши, поэтому $|G_7(x',\,x'')|\le M\,h^\alpha$.

Известно (см. [4]), что множество $S_d(x')$ однозначно проектируется на множество $\Omega_d(x')$, лежащее в круге радиуса d с центром в точке x' на касательной плоскости $\Gamma(x')$ к S в точке x'. На куске $S_d(x')$ выберем локальную прямоугольную систему координат $(u,\,v,\,w)$ с началом в точке x', где ось w направим вдоль нормали $\overrightarrow{n}(x')$.

Очевидно, что оси u и v будут лежать на касательной плоскости $\Gamma(x')$. Тогда в этих координатах окрестность $S_d(x')$ можно задать уравнением

$$w = f(u,\, v), \quad (u,\, v) \in \Omega_d(x'),$$

причем

$$f \in C^{1,\alpha}(\Omega_d(x)) \ \text{ и } \ f(0,\,0) = 0, \frac{\partial f(0,\,0)}{\partial u} = 0\, \frac{\partial f(0,\,0)}{\partial v} = 0. \tag{6}$$

Кроме того, если $\tilde{y} \in \Gamma(x')$ есть проекция точки $y \in S$, то (см. [5])

$$\left|x' - \tilde{y}\right| \le \left|x' - y\right| \le C_1 \left|x' - \tilde{y}\right|,$$

где C_1- положительная постоянная, зависящая лишь от S (для сферы $C_1 = \sqrt{2}$).

Пусть $d_0 = d/C_1$ и $O_{d_0}(x') = \left\{u^2 + v^2 < d_0\right\} \subset \Gamma(x')$ (очевидно, что $O_{d_0}(x') \subset \Omega_d(x')$). Через $\Omega_{h/2}(x', x'')$ обозначим проекцию множества $S_{h/2}(x') \bigcup S_{h/2}(x'')$ на касательную плоскость $\Gamma(x')$. Так как

$$\int_{O_{d_0}(x') \setminus O_{2h}(x')} \frac{\left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1}\right) u + \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2}\right) v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} dudv = 0,$$

то по формуле сведения поверхностного интеграла к повторному получаем:

$$\int_{S_d(x') \setminus (S_{h/2}(x') \bigcup S_{h/2}(x''))} \frac{\left(grad\rho(x') - grad\rho\,(x'')\,,\, \overrightarrow{x'y}\right)}{|x' - y|^3} dS_y =$$

$$= \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{\left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1}\right) u + \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2}\right) v + \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_3} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_3}\right) f(u,\, v)}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + f^2(u,\, v)}\right)^3} \times$$

$$\times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} dudv =$$

$$= \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{\left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_3} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_3}\right) f(u,\, v)}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + f^2(u, v)}\right)^3} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} dudv +$$

$$+ \int_{\Omega_d(x') \setminus \Omega_{h/2}(x', x'')} \frac{\left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_1}\right) u + \left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho(x'')}{\partial x_2}\right) v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + f^2(u,\, v)}\right)^3} \times$$

$$\times \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dv}\right)^2} - 1\right) dudv +$$

$$+\int_{\Omega_d(x')\backslash\Omega_{h/2}(x',x'')}\left\{\left(\frac{\partial\rho\left(x'\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho\left(x''\right)}{\partial x_1}\right)u+\left(\frac{\partial\rho\left(x'\right)}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho\left(x''\right)}{\partial x_2}\right)v\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)dudv+$$

$$+\int_{\Omega_d(x')\backslash O_{d_0}(x')}\frac{\left(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\right)u+\left(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\right)v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv+$$

$$+\int_{O_{2h}(x')\backslash\Omega_{h/2}(x',x'')}\frac{\left(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_1}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_1}\right)u+\left(\frac{\partial\rho(x')}{\partial x_2}-\frac{\partial\rho(x'')}{\partial x_2}\right)v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv.$$

Тогда с помощью неравенств

$$|f(u,\,v)|\leq M\,\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{1+\alpha},(u,\,v)\in\Omega_d(x'),$$

$$\left|\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}-1\right|\leq M\,\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{2\alpha},(u,\,v)\in\Omega_d(x')$$

и

$$\left|\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,\,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right|\leq$$

$$\leq\frac{M}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{3-2\alpha}},(u,\,v)\in\Omega_d(x'),(u,v)\neq(0,0)\,,$$

нетрудно можно показать, что

$$\left|G_8(x',\,x'')\right|\leq M\,\left(h\int_h^d\frac{\omega(grad\rho,\,t)}{t^2}dt+\omega\left(grad\rho,h\right)\right).$$

С тем же способом можно докозать, что

$$\left|G_9(x',\,x'')\right|\leq M\,\left(h^\alpha\,\left\|grad\rho\right\|_\infty+\omega\left(grad\rho,h\right)\right).$$

Перейдя к локальной прямоугольной системе координат $(u,\,v,\,w)$ с началом в точке x' и учитывая (6), с помощью несложных рассуждений можно доказать, что
$|G_{10}(x',\,x'')|\leq M\,\left(h^\alpha\,\left\|grad\rho\right\|_\infty+\omega\left(grad\rho,h\right)\right)$ при $0<\alpha<1$,
$|G_{10}(x',\,x'')|\leq M\,\left(h\,\left|\ln h\right|\,\left\|grad\rho\right\|_\infty+\omega\left(grad\rho,h\right)\right)$ при $\alpha=1$.

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $G_i(x', x'')$, $i = \overline{1,10}$, имеем:

$$|G(x') - G(x'')| \le$$

$$\le M \left(\int_0^h \frac{\omega(grad\rho,\, t)}{t} dt + h \int_h^{diamS} \frac{\omega(grad\rho,\, t)}{t^2} dt + h^\alpha \, \|grad\rho\|_\infty + \omega(grad\rho,\, h) \right)$$

при $0 < \alpha < 1$,

$$\left|G\left(x'\right) - G\left(x''\right)\right| \le M \left(\int_0^h \frac{\omega(grad\rho,\, t)}{t} dt + h \int_h^{diamS} \frac{\omega(grad\rho,\, t)}{t^2} dt + \right.$$
$$\left. + h\, |\ln h|\, \|grad\rho\|_\infty + \omega(grad\rho,\, t) \right) \quad \text{при} \quad \alpha = 1. \qquad (7)$$

Так как функция

$$\psi(h) = \begin{cases} h^\alpha + \omega(grad\rho, h) + \int_o^h \frac{\omega(grad\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{diamS} \frac{\omega(grad\rho, t)}{t^2} dt, \text{ если } 0 < \alpha < 1, \\ h\, |\ln h| + \omega(grad\rho, h) + \int_o^h \frac{\omega(grad\rho, t)}{t} dt + h \int_h^{diamS} \frac{\omega(grad\rho, t)}{t^2} dt, \text{ если } \alpha = 1, \end{cases}$$

не убывает, функция $\psi(h)/h$ не возрастает и $\lim\limits_{h \to 0} \psi(h) = 0$, то, принимая во внимание оценки (4), (5) и (7) в равенстве (3), получаем справедливость теоремы.

Список литературы

[1] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. -М.: Мир, 1987.

[2] Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. - М.: Гостехиздат, 1953.

[3] Khalilov E.H. Existence and calculation formula of the derivative of double layer acoustic potential. Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. phys.-tech. and math. sci., 2013, vol. 33, No. 4, pp. 139-146.

[4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1976.

[5] Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения.- Деп. в ВИНИТИ. No. 4281-81- 60 с.

Э. Г. Халилов

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия, кафедра "Прикладная математика"

E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Received 15 May 2013

Accepted 24 November 2014