Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 2, 2018, December
ISSN 2222-5498

Интегрирование Бесконечных Цепочек в Классе Вполне Непрерывных Операторов

Г.М.Масмалиев

Аннотация. Рассматривается некоторые обобшение цепочек Тоды и Вольтерра Изучена бесконечных цепочек в классе вполне непрерывных операторов и в том числе в классе операторов Гильберта-Шмидта.

Ключевые слова: начально-краевая задача, вполне непрерывных операторов , операторы Гильберта-Шмидта.

1. Введение

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \frac{\alpha}{2} a_n(b_n - b_{n+1}) + \frac{\beta}{2} a_n(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot{b}_n = \alpha(a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta\left[a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - a_n^2(b_n + b_{n+1})\right], \\ a_{-1} = 0,\ n = 0,\ 1, 2, ...; \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \end{cases} \tag{1}$$

$$a_n(0) = \tilde{a}_n > 0,\ b_n(0) = \tilde{b}_n,\ n = 0,\ 1, 2 ..., \tag{2}$$

где последовательности $\tilde{a}_n,\ \tilde{b}_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{a}_n,\ \tilde{b}_n \in \ell_2\,[0, \infty)\,.$$

Заметим, что система уравнений (1) является обобщением цепочки Тоды (при $\alpha = 1,\ \beta = 0$) и цепочки Вольтерра (при $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ b_n \equiv 0$). Для различных классов начальных данных задача Коши для цепочек Тоды и Вольтерра исследовалась в работах многих авторов (см. [1] – [3] и имеющиеся там литературу).

Настоящая работа посвящена изучению цепочки (1) в классе вполне непрерывных операторов и в том числе в классе операторов Гильберта-Шмидта. Это означает, что ассоциированный с цепочкой (1) разностный оператор

$$(L\,(t)\,y)_n = a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},\ n = 0, 1, ..., \ y_{-1} = 0$$

 © 2011 JCAM All rights reserved.

является вполне непрерывным или же оператором Гильберта-Шмидта в пространстве $\ell_2\,[0,\infty)$.

Будем искать решение $x(t) = (a_n(t),\, b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ задачи (1), (2), удовлетворяющее при любом $T > 0$ условию

$$\|x(t)\|_{C([0,\,T];\,\ell_2[0,\infty))} < \infty. \tag{3}$$

Вводим также банахово пространство последовательностей c_0 $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, сходящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \max\limits_{n\geq 0} |x_n|$. Тогда $C\left([0,\,T]\,;\,c_0\right)$ является банаховым пространством на отрезке $[0,\,T]$ функций $x(t)$ со значениями в c_0 относительно нормы

$$\|x(t)\|_{C([0,\,T];\,c_0)} = \max_{0\leq t\leq T} \|x(t)\|_{c_0}.$$

Нас будет интересовать решение $x(t) = (a_n(t),\, b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ задачи (1), (2) также в классе

$$\|x(t)\|_{C([0,\,T];\,c_0)} < \infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Решение задачи* (1), (2) *существует и единственно в классе* (3), *если* $\tilde{a}_n,\ \tilde{b}_n \in \ell_2\,[0,\infty)$.

Теорема 2. *Решение задачи* (1), (2) *существует и единственно в классе (4), если* $\tilde{a}_n \to 0,\ \tilde{b}_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

2. Доказательство теорем

Заметим, прежде всего, что если $a_n = a_n\left(t\right),\, b_n = b_n\left(t\right)$удовлетворяют системе (1), то семейство самосопряженных операторов $L(t)$ является унитарно эквивалентным, т.е. существует семейство унитарных операторов, $U(t)$ удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &U(0) = E,\\ &L(t) = U^{-1}(t)L(0)U(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где E - единичный оператор, действующий в пространстве $\ell_2\,[0,\infty)$.

Лемма. *Если унитарно эквивалентный оператор* $L(t)$ *есть оператор Гильберта-Шмидта то его норма* $\|L(t)\|_2$ *Гильберта –Шмидта постоянна относительно* t*:*

$$\|L(t)\|_2 = \|L(0)\|_2\,.$$

Доказательство. Пусть оператор $L(t)$ унитарно эквивалентен и служит оператор Гильберта-Шмидта в гильбертовом пространствеH. Пусть $\{e_\alpha\}$ - ортонормированный базис пространства H. Тогда имеет место равенство

$$\|L(t)\|_2^2 = \sum_{\alpha} \|L(t)e_\alpha\|^2\,.$$

Пользуясь формулами (5) найдем, что

$$\|L(t)\|_2^2 = \sum_\alpha \left(U^{-1}(t)L(0)U(t)e_\alpha, U^{-1}(t)L(0)U(t)e_\alpha\right) =$$
$$= \sum_\alpha \left(L(0)U(t)e_\alpha, L(0)U(t)e_\alpha\right) = \sum_\alpha \|L(0)U(t)e_\alpha\|^2 = \|L(0)\|_2^2,$$

где мы учли, что $\left(U^{-1}x, U^{-1}x\right) = (x,x)$ для любых $x \in H$ и система $\{u(t)e_\alpha\}$ является ортонормированным базисом.

Лемма доказана.

Докажем теорему 1. Полагая $x(t) = (a_n(t),\, b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ сводим задачу (1), (2) к уравнению вида

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F\left(x(\tau)\right) d\tau,$$

где F- оператор, порожденный в $C\left([0,\,T]\,;\,\ell_2\,[0,\infty)\right)$ правой частью системы уравнений (1). При этом ясно что оператор F непрерывно дифференцируем отображает пространство $C\left([0,\,T]\,;\,\ell_2\,[0,\infty)\right)$ в себя. Применив принцип сжатых отображений или же метод последовательных приближений, устанавливаем, что в некотором сегменте $[0,\,\delta]$ задача (1), (2) имеет единственное решение $x(t) = (a_n(t),\, b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ с конечной нормы $\|x(t)\|_{C([0,\,T];\,\ell_2[0,\infty))} < \infty$.

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|x(t)\|_{\ell_2[0,\infty)} \leq \|L(t)\|_2\,,$$

где $\|\cdot\|_2$является нормой Гильберта-Шмидта. Пользуясь теперь леммой, находим, что

$$\|x(t)\|_{\ell_2[0,\infty)} \leq \|L(0)\|_2\,,$$

согласно которому решение $x(t) = (a_n(t),\, b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ продолжимо на всю положительную полуось. Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание. Из схемы доказательства следует, что решение задачи (1), (2) при любом обладает свойством

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2a_n^2(t) + b_n^2(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{2a_n^2(0) + b_n^2(0)\right\}.$$

Далее, следуя соответствующим рассуждениям из доказательства теоремы 1, устанавливаем, что в некотором сегменте $[0,\,\delta]$ существует решение $x(t) = (a_n(t),\, b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условию

$$\|x(t)\|_{C([0,\,\delta];\,c_0)} < \infty.$$

С другой стороны, имеем

$$\|x(t)\|_{c_0} \leq \|L(t)\| = \|L(0)\|\,,$$

где мы учли, что семейство операторов $L(t)$ унитарно эквивалентно. Как явствует из последнего неравенства, решение $x(t)$ продолжимо на всю положительную полуось. Этим же завершается доказательство теоремы 2.

Список литературы

[1] *Березанский Ю.М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи//Докл.АН СССР,1985, т.281,N-1,с.16-19.

[2] *Юрко В.А.* Об интегрировании нелинейных динамических систем методом обратной спектральной задачи//Матем.заметки,1995,т.57,N6, с.945-949.

[3] *Masmaliyev H.M.,Khanmamedov A.Kh.* A solution method for system of nonlinear differential equations//Transations of NAS Azerbaijan,2012,vol.XXXII,N1,p.101-106.

Г.М.Масмалиев
Бакинский государственный университет
*Email:*hacimasmaliyev@hotmail.com