Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 2, 2018, December
ISSN 2222-5498

О Полноте Собственных Функций Одного Разрывного Дифференциального Оператора Второго Порядка

Г.В. Магеррамова

Аннотация. Изучается спектральная задача для разрывного дифференциального оператора второго порядка со спектральным параметром в условиях сопряжения, которая возникает при решении задачи колебания нагруженной струны с закрепленными концами. Найдены асимптотики собственных значений и собственных функций спектральной задачи, доказаны теоремы о полноте собственных функций в пространствах $L_p \oplus C$ и L_p.

Key Words and Phrases: собственное значение, собственная функция, асимптотическая формула, биортогональная система, полнота, минимальность.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34L10, 41A58, 46A35

1. Введение

Рассмотрим спектральную задачу

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad , x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right), \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = y(1) = 0, \\ y(\frac{1}{3} - 0) = y(\frac{1}{3} + 0), \\ y'(\frac{1}{3} - 0) - y'(\frac{1}{3} + 0) = \lambda m y(\frac{1}{3}), \end{array}\right\} \tag{2}$$

которая возникает при решении задачи колебания нагруженной струны с закрепленными концами [1-3]. В случае, когда груз помещен в середине струны, эта задача исследована в работах [4;5]. Аналогичные вопросы для задачи колебания струны, когда груз закреплен в одном или в двух концах струны, другими методами исследованы в работах [6-9].

2. Асимптотика собственных значений и собственных функций

Положим $\lambda = \rho^2$ и для краевых форм из (2) введем следующие обозначения.

$$U_\nu(y) = U_{\nu 1}(y) + U_{\nu 2}(y), \nu = \overline{1,4}, \tag{3}$$

где

$$\begin{array}{ll} U_{11}(y) = y(0), & U_{12}(y) \equiv 0, \\ U_{21}(y) \equiv 0, & U_{22}(y) = y(1), \\ U_{31}(y) = y(\frac{1}{3} - 0), & U_{32}(y) = -y(\frac{1}{3} + 0), \\ U_{41}(y) = y'(\frac{1}{3} - 0), & U_{42}(y) = -y'(\frac{1}{3} + 0) - \rho^2 m y(\frac{1}{3} + 0). \end{array}$$

Сперва докажем следующую теорему

Теорема 2.1. *Спектральная задача* (1), (2) *имеет две серии простых собственных значений* $\lambda_{1,n} = (\rho_{1,n})^2$, $n = 1, 2, ...,$ *и* $\lambda_{2,n} = (\rho_{2,n})^2$, $n = 0, 1, 2, ...,$ *где*

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{1,n} = 3\pi n, \\ \rho_{2,n} = \frac{3\pi n}{2} + \frac{2+(-1)^n}{\pi m n} + O(\frac{1}{n^2}). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Им соответствуют собственные функции $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...,$ *задаваемые формулами*

$$u_{2n-1}(x) = \sin 3\pi n x, x \in [0,1], n = 1, 2, ...$$

$$u_{2n}(x) = \left\{ \begin{array}{l} \{\sin \rho_{2,n}(x - \frac{1}{3}) + \sin \rho_{2,n}(x + \frac{1}{3}), \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \sin \rho_{2,n}(1 - x), \quad x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad n = 0, 1, 2, ... \end{array} \right. \tag{5}$$

Доказательство. В качестве линейно–независимых решений уравнения (1) возьмем

$$y_{11}(x) = \sin \rho x, \quad y_{12}(x) = \cos \rho x,$$

при $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ и

$$y_{21}(x) = \sin \rho(x - \frac{1}{3}), \quad y_{22}(x) = \cos \rho(x - \frac{1}{3}),$$

при $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Собственные функции задачи (1) , (2) будем искать в виде

$$y(x,\rho) = \left\{ \begin{array}{ll} c_{11} y_{11}(x) + c_{12} y_{12}(x), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ c_{21} y_{21}(x) + c_{22} y_{22}(x), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \end{array} \right. =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} c_{11} \sin \rho x + c_{12} \cos \rho x, \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ c_{21} \sin \rho(x - \frac{1}{3}) + c_{22} \cos \rho(x - \frac{1}{3}), \quad x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]. \end{array} \right. \tag{6}$$

Потребуем, чтобы функция $y(x,\rho)$ удовлетворяла граничным условиям (2). Тогда для определения чисел $c_{j.k}$ получим систему линейных однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} U_{\nu 1}(y_{11}) + C_{12} U_{\nu 1}(y_{12}) + C_{21} U_{\nu 2}(y_{21}) + C_{22} U_{\nu 2}(y_{22}) = 0, \\ \nu = \overline{1,4}, \end{array} \right. \tag{7}$$

определителем которой является

$$\Delta(\rho) = \det \|U_{\nu j}(y_{jk})\|, j, k = 1, 2, \nu = \overline{1, 4}.$$

Учитывая (3) для значений форм $U_{\nu j}(y_{jk})$ имеем

$$\begin{cases} U_{11}(y_{11}) = 0, U_{11}(y_{12}) = 1, U_{12}(y_{21}) = 0, U_{12}(y_{22}) = 0, \\ U_{21}(y_{11}) = 0, U_{21}(y_{12}) = 0, U_{22}(y_{21}) = \sin\frac{2\rho}{3}, U_{22}(y_{22}) = \cos\frac{2\rho}{3}, \\ U_{31}(y_{11}) = \sin\frac{\rho}{3}, U_{31}(y_{12}) = \cos\frac{\rho}{3}, U_{32}(y_{21}) = 0, U_{32}(y_{22}) = -1, \\ U_{41}(y_{11}) = \rho\cos\frac{\rho}{3}, U_{41}(y_{12}) = -\rho\sin\frac{\rho}{3}, U_{42}(y_{21}) = -\rho, U_{42}(y_{22}) = -\rho^2 m \end{cases} \tag{8}$$

Раскрывая определитель $\Delta(\rho)$, с учетом (8) получим

$$\Delta(\rho) = \rho\sin\frac{\rho}{3}\left(-\rho m\sin\frac{2\rho}{3} + 2\cos\frac{2\rho}{3} + 1\right). \tag{9}$$

Из формулы (9) очевидно, что функция $\Delta(\rho)$ имеет две серии нулей, первая из которых состоит из нулей функции $\sin\frac{\rho}{3}$ т.е. $\rho_{1,n} = 3\pi n$, а вторая серия $\rho_{2,n}$ состоит из нулей функции $-\rho m\sin\frac{2\rho}{3} + 2\cos\frac{2\rho}{3} + 1$.

Рассуждая далее аналогично [10, стр.20], получим, что для $\rho_{2,n}$ справедлива асимптотическая формула

$$\rho_{2,n} = \frac{3\pi n}{2} + \delta_n,$$

где δ_n удовлетворяют соотношению

$$\sin\frac{2\delta_n}{3} = \frac{(-1)^n}{m\rho_{2,n}} + \frac{2}{m\rho_{2,n}}\cos\frac{2\delta_n}{3}.$$

Из последнего соотношения имеем

$$\delta_n = \frac{1}{\pi m n}((-1)^n + 2) + O(\frac{1}{n^2})),$$

что доказывает справедливость (4).

Теперь подставляя $\rho = 3\pi n$ в (7), с учетом (8), найдем $c_{12} = c_{22} = 0, c_{21} = (-1)^n c_{11}$. Поэтому выбирая $c_{11} = 1, c_{21} = (-1)^n$, получим из (8) собственную функцию $u_{2n-1}(x)$, соответствующую собственному значению $\lambda_{1,n} = (3\pi n)^2$в виде

$$u_{2n-1}(x) = \sin 3\pi n x, x \in [0,1], n = 1, 2, ...$$

Аналогично, при $\rho = \rho_{2,n}$ из (7) и (8) заключаем что

$$\begin{array}{l} c_{12} = 0, \\ c_{21}\sin\frac{2\rho_{2,n}}{3} + c_{22}\cos\frac{2\rho_{2,n}}{3} = 0, \\ c_{22} = c_{11}\sin\frac{\rho}{3}. \end{array}$$

Учитывая , что $\sin\frac{2\rho_{2,n}}{3} \neq 0$ и выбирая $c_{11} = 2\cos\frac{2\rho_{2,n}}{3}$, получим из (6) собственную функцию $u_{2n}(x)$, соответствующую собственному значению $\lambda_{2,n} = (\rho_{2,n})^2$ в следующем виде

$$u_{2n}(x) = \begin{cases} \sin\rho_{2,n}(x - \frac{1}{3}) + \sin\rho_{2,n}(x + \frac{1}{3}), \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \sin\rho_{2,n}(1 - x), \quad x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Теорема доказана. □

3. Построение функции Грина и резольвенты линеаризующего оператора

Сперва построим функцию Грина задачи (1) , (2). Она определяется как ядро интегрального представления для решения соответствующей неоднородной задачи

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = f(x), \tag{10}$$

удовлетворяющее краевым условиям (2). Решение задачи (10) ,(2) будем искать в виде

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ y_2(x), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{cases} y_1(x) = c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) + \int_0^{\frac{1}{3}} g(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, \\ y_2(x) = c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) + \int_{\frac{1}{3}}^1 g(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, \end{cases} \tag{12}$$

$$g(x,\xi,\rho) = \begin{cases} -\frac{1}{2\rho}\sin\rho(x-\xi), & \xi < x, \\ \frac{1}{2\rho}\sin\rho(x-\xi), & \xi > x. \end{cases} \tag{13}$$

Потребуем чтобы функция (11) удовлетворяла краевым условиям (2). Тогда для определения чисел $C_{j,k}$ получим систему алгебраических уравнений

$$U_\nu(y) = \sum_{j,k=1}^{2} C_{j,k}U_{\nu j}(y_{jk}) + \int_0^{\frac{1}{3}} U_{\nu 1}(g)f(\xi)d\xi + \int_{\frac{1}{3}}^1 U_{\nu 2}(g)f(\xi)d\xi = 0, \nu = \overline{1,4}. \tag{14}$$

Определив числа $C_{j,k}$ из (14) и подставив их значения в (12) , для решения задачи (10), (12) получим формулы

$$\begin{matrix} y_1(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} G_{11}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi + \int_{\frac{1}{3}}^1 G_{12}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ y_2(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} G_{21}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi + \int_{\frac{1}{3}}^1 G_{22}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{matrix} \tag{14'}$$

где

$$G_{11}(x,\xi,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} g & y_{11} & y_{12} & 0 & 0 \\ U_{\nu 1}(g) & U_{\nu 1}(y_{11}) & U_{\nu 1}(y_{12}) & U_{\nu 2}(y_{21}) & U_{\nu 2}(y_{22}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu=\overline{1,4} & & & & \end{vmatrix}$$

$$G_{12}(x,\xi,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} 0 & y_{11} & y_{12} & 0 & 0 \\ U_{\nu 2}(g) & U_{\nu 1}(y_{11}) & U_{\nu 1}(y_{12}) & U_{\nu 2}(y_{21}) & U_{\nu 2}(y_{22}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu=\overline{1,4} & & & & \end{vmatrix}$$

$$G_{21}(x,\xi,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ U_{\nu 1}(g) & U_{\nu 1}(y_{11}) & U_{\nu 1}(y_{12}) & U_{\nu 2}(y_{21}) & U_{\nu 2}(y_{22}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu=\overline{1,4} & & & & \end{vmatrix}$$

$$G_{22}(x,\xi,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} g & 0 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ U_{\nu 2}(g) & U_{\nu 1}(y_{11}) & U_{\nu 1}(y_{12}) & U_{\nu 2}(y_{21}) & U_{\nu 2}(y_{22}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu=\overline{1,4} & & & & \end{vmatrix}$$

а $\Delta(\rho)$ – определитель из (7),

$$\begin{array}{l} U_{11}(g)=-\frac{1}{2\rho}\sin\rho\xi,\ U_{12}(g)=0, \\ U_{21}(g)=0,\ U_{22}(g)=-\frac{1}{2\rho}\sin\rho(1-\xi), \\ U_{31}(g)=-\frac{1}{2\rho}\sin\rho(\frac{1}{3}-\xi),\ U_{32}(g)=-\frac{1}{2\rho}\sin\rho(\frac{1}{3}-\xi), \\ U_{41}(g)=-\frac{1}{2}\cos\rho(\frac{1}{3}-\xi),\ U_{42}(g)=-\frac{\rho m}{2}\sin\rho(\frac{1}{3}-\xi)-\frac{1}{2}\cos\rho(\frac{1}{3}-\xi). \end{array} \tag{15}$$

Подставим (15), (8) и (9) в определители в формулах для $G_{kj}(x,\xi,\rho)$. Преобразуя полученные определители аналогично [11, стр. 95], и затем раскрывая их, получим формулы для компонентов функции Грина. Сформулируем это в виде леммы.

Лемма 3.1. *Для компонентов $G_{kj}(x,\xi,\rho)$ функции Грина задачи (1) , (2) справедливы следующие представления*

$$G_{11}(x,\xi,\rho)=\begin{cases} -\frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho}+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sin\rho x\cdot\sin\rho(1-\xi)-\frac{\rho m\sin\rho x\cdot\sin\frac{2\rho}{3}\cdot\sin\rho(\frac{1}{3}-\xi)}{\Delta(\lambda)}, \xi<x, \\ \frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho}+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sin\rho\xi\cdot\sin\rho(1-x)+\frac{\rho m\sin\rho\xi\cdot\sin\frac{2\rho}{3}\cdot\sin\rho(x-\frac{1}{3})}{\Delta(\lambda)}, \xi>x, \end{cases} \tag{16}$$

$$G_{12}(x,\xi,\rho)=-\frac{\sin\rho(1-\xi)}{\Delta(\lambda)}\sin\rho x, \tag{17}$$

$$G_{21}(x,\xi,\rho)=-\frac{\sin\rho\xi}{\Delta(\lambda)}\sin\rho(x-1), \tag{18}$$

$$G_{22}(x,\xi,\rho)=\begin{cases} \frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho}-\frac{\sin\rho(1-\xi)}{\Delta(\lambda)}\left(-\sin\rho x+\rho m\sin\frac{\rho}{3}\cdot\sin\rho(x-\frac{1}{3})\right), \xi<x \\ \frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho}-\frac{\cos\frac{2\rho}{3}}{\Delta(\lambda)}\sin\rho(x-\frac{1}{3})(-\sin\rho(\frac{1}{3}-\xi)\cos\frac{\rho}{3}+\rho m\sin\rho(\frac{1}{3}-\xi)+ \\ +\cos\rho\left(\frac{1}{3}-\xi\right)(-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\cos\rho\left(x-\frac{1}{3}\right)\sin\frac{2\rho}{3}(-\sin\rho\left(\frac{1}{3}-\xi\right)\cos\frac{\rho}{3}- \\ -\sin\frac{\rho}{3}(-\cos\left(\frac{1}{3}-\xi\right)-\rho m\sin\left(\frac{1}{3}-\xi\right))), \xi>x. \end{cases} \tag{19}$$

Перейдем теперь к построению линеаризующего оператора. Обозначим через $W_p^k\left(0,\frac{1}{3}\right)\oplus W_p^k\left(\frac{1}{3},1\right)$ пространства функций , сужения которых на отрезки $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3},1\right]$ принадлежат, соответственно, Соболевским пространствам $W_p^k\left(0,\frac{1}{3}\right)$ и $W_p^k\left(\frac{1}{3},1\right)$. Определим в пространстве $L_p(0,1)\oplus C$ оператор L следующим образом:

$$D\left(\mathrm{L}\right)=\left\{\begin{array}{l}\widehat{u}\in L_p(0,1)\oplus C:\widehat{u}=\left(u,mu\left(\frac{1}{3}\right)\right),u\in W_p^2\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},1\right)\\ u(0)=u(1)=0,u\left(-\frac{1}{3}\right)=u\left(\frac{1}{3}\right)\end{array}\right\} \tag{20}$$

и для $\widehat{u}\in D\left(\mathrm{L}\right)$

$$\mathrm{L}\,\widehat{u}=\left(-u'';u'\left(\frac{1}{3}-0\right)-u'\left(\frac{1}{3}+0\right),\widehat{u}\in D(\mathrm{L})\right). \tag{21}$$

Лемма 3.2. *Оператор, определяемый формулами (20), (21) является линейным замкнутым оператором с плотной областью определения в* $L_p(0,1)\oplus C$. *Собственные значения оператора* L *и задачи (1) ,(2) совпадают , а собственными векторами оператора* L *являются* $\left\{\widehat{u}_k\right\}_{k\in N_0}$, *где* $N_0=N\cup\{0\}$, $\widehat{u}_{2n-1}=(u_{2n-1}(x);0)$, $\widehat{u}_{2n}=(u_{2n}(x);m\sin\frac{2\rho_{2,n}}{3})$.

Доказательство. Для доказательства первой части леммы возьмем $\widehat{u}\ (u,\alpha)\in L_p(0,1)\oplus C$ и определим функционал $F(\widehat{u})$ следующим образом :

$$F(\widehat{u})=mu\left(\frac{1}{3}\right)-\alpha.$$

Положим также

$$U_\nu(\widehat{u})=U_\nu(u),\nu=1,2,3.$$

Тогда $F,U_\nu,\nu=1,2,3$, являются ограниченными линейными функционалами на $W_p^2\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},1\right)\oplus C$, но неограниченными на $L_p(0,1)\oplus C$. Поэтому (см. например, [12, стр. 27-29]) множество

$$D\left(\mathrm{L}\right)=\left\{\widehat{u}=(u,\alpha),u\in W_p^2\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},1\right),F(\tilde{u})=U_\nu(\tilde{u})=0,\nu=1,2,3\right\}.$$

является всюду плотным в $L_p(0,1)\oplus C$, а L является замкнутым оператором как сужение соответствующего замкнутого максимального оператора.

Вторая часть леммы проверяется непосредственно.

Лемма доказано. □

Для построения резольвенты оператора L , рассмотрим уравнение

$$\mathrm{L}\ \widehat{u}\ -\lambda\ \widehat{u}=\widehat{f}, \tag{22}$$

где $\widehat{u}\in D(\mathrm{L})$, $\widehat{f}=(f,\beta)\in L_p(0,1)\oplus C$. Уравнение (22) можно переписать в следующем виде.

$$\left\{\begin{array}{l}-u''=\lambda u+f,\\ u'\left(-\frac{1}{3}\right)-u'\left(\frac{1}{3}\right)-\lambda mu\left(\frac{1}{3}\right)=\beta,\\ U_\nu(u)=0,\nu=1,2,3.\end{array}\right. \tag{23}$$

Лемма 3.3. *Для решения* $\widehat{u} = \left(u, mu\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ *уравнения (22) имеет место представления*

$$\begin{aligned} u(x,\rho) = & \frac{\beta \cos\frac{2\rho}{3} \cdot \sin\rho x}{\rho \sin\frac{\rho}{3}(1+2\cos\frac{2\rho}{3} - \rho m \sin\frac{2\rho}{3})} - \int_0^x f(\xi)\frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho}d\xi + \\ & \frac{1}{\Delta(\rho)}\int_0^{\frac{1}{3}} f(\xi)\cdot\sin\rho x\cdot\sin\rho(1--\xi)d\xi - \\ & \frac{1}{\Delta(\rho)}\int_0^{\frac{1}{3}} \rho m \sin\rho x \cdot \sin\frac{2\rho}{3}\cdot\sin\rho\left(\frac{1}{3}-\xi\right)f(\xi)d\xi - \\ & -\frac{1}{\Delta(\rho)}\int_{\frac{1}{3}}^1 \sin\rho x\cdot\sin\rho(1-\xi)f(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{24}$$

если $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

$$\begin{aligned} u(x,\rho) = & \frac{\beta\cos\frac{2\rho}{3}\cdot\sin\rho x}{\rho\sin\frac{\rho}{3}(1+2\cos\frac{2\rho}{3}-\rho m\sin\frac{2\rho}{3})} - \\ & -\frac{1}{\Delta(\rho)}\int_0^{\frac{1}{3}} f(\xi)\sin\rho\xi\cdot\sin\rho(x-1)d\xi + \\ & +\int_x^1 \frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho}f(\xi)d\xi + \frac{1}{\Delta(\rho)}\int_{\frac{1}{3}}^1 \sin\rho x\cdot\sin\rho(1-\xi)f(\xi)d\xi - \\ & -\frac{1}{\Delta(\rho)}\int_{\frac{1}{3}}^1 \rho m\sin\frac{\rho}{3}\cdot\sin\rho\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\sin\rho(1-\xi)f(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{25}$$

если $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ *и*

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{3},\rho\right) = & \frac{1}{\rho(1+2\cos\frac{2\rho}{3}-\rho m\sin\frac{2\rho}{3})}\times \\ & \times\left(\beta\cos\frac{2\rho}{3} + 2\cos\frac{\rho}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} f(\xi)\sin\rho\xi d\xi + \int_{\frac{1}{3}}^1 \sin\rho(1-\xi)f(\xi)d\xi\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Доказательство. Решение уравнения (22) будем искать в виде

$$u(x,\rho) = \begin{cases} c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) + y_1(x), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) + y_2(x), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \end{cases} \tag{27}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены (14). Так как функция $y(x)$, определяемая (11) удовлетворяет краевым условиям (2), то

$$U_\nu(y) = 0, \nu = \overline{1,4}. \tag{28}$$

Потребуем, чтобы функция $u(x,\rho)$ удовлетворяла краевым условиям $U_\nu(u) = 0, \nu = 1,2,3, U_\nu(u) = \beta$. Тогда с учетом (28) из (27) получим

$$\begin{cases} C_{11}U_{\nu 1}(y_{11}) + C_{12}U_{\nu 1}(y_{12}) + C_{21}U_{\nu 2}(y_{21}) + C_{22}U_{\nu 2}(y_{22}) = 0, \nu = 1,2,3; \\ C_{11}U_{41}(y_{11}) + C_{12}U_{41}(y_{12}) + C_{21}U_{42}(y_{21}) + C_{22}U_{42}(y_{22}) = \beta \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных C_{kj}, получим

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\frac{\beta}{\Delta(\rho)}U_{11}(y_{12})\left[U_{22}(y_{21})U_{32}(y_{22}) - U_{22}(y_{22})U_{32}(y_{21})\right], \\ C_{12} &= \frac{\beta}{\Delta(\rho)}U_{11}(y_{11})\left[U_{22}(y_{21})U_{32}(y_{22}) - U_{22}(y_{22})U_{32}(y_{21})\right], \\ C_{21} &= \frac{\beta}{\Delta(\rho)}U_{22}(y_{22})\left[U_{11}(y_{11})U_{31}(y_{12}) - U_{11}(y_{12})U_{31}(y_{11})\right], \\ C_{22} &= -\frac{\beta}{\Delta(\rho)}U_{22}(y_{21})\left[U_{11}(y_{11})U_{31}(y_{12}) - U_{11}(y_{12})U_{31}(y_{11})\right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения коэффициентов C_{kj} в (27) и учитывая формулы (8), (16)-(19), получим справедливость формул (24) и (25). А формула (26) получается из (25) (или из (24)) подстановкой $x = \frac{1}{3}$.

Лемма доказано. □

4. Полнота собственных функций в пространствах $L_p(0,1) \oplus C$ и $L_p\,(0,1)$

Теорема 4.1. *Система* $\{\hat{u}_n\}_{n\in N_0}$ *собственных векторов оператора* L *является полной в пространстве* $L_p\,(0,1) \oplus C$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Для доказательства полноты системы собственных функций оператора L в пространстве $L_p\,(0,1) \oplus C$ нам необходима получить оценку резольвенты оператора L при больших значениях $|\rho|$. Будем использовать следующие известные неравенства

$$|\sin\rho| \le ce^{|\rho|\sin\varphi}, |\cos\rho| \le ce^{|\rho|\sin\varphi}, \tag{29}$$

где $\rho = re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$. Кроме того, вне кружков одинокого радиуса δ с центрами в нулях $\sin\rho$ справедлива оценка

$$|\sin\rho| \ge m_\delta e^{r\sin\varphi}. \tag{30}$$

Из оценок (29) , (30) и из формулы (9) следует , что при больших значениях $|\rho|$ вне кружков $K_{j,n}\,(\delta) = \{\rho : |\rho - \rho_{j,n}| < \delta\}$ радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\rho)$ справедлива оценка

$$|\Delta(\rho)| \ge M_\delta re^{r\sin\varphi}. \tag{31}$$

Положим $G\,(\delta) = C \backslash \cup_{j,n} K_{j,n}\,(\delta)$. Из представлений (24), (25) с учетом неравенств (29) –(31) получим неравенство

$$|u(x,\rho)| \le \frac{C_\delta}{|\rho|}, \rho \in G\,(\delta)\ ,\ |\rho| \ge r_0,$$

которое справедливо равномерно по $x \in [0,1]$. Из последней оценки следует , что для резольвенты $R(\lambda) = (\mathrm{L} - \lambda I)^{-1}$ оператора L вне вышеуказанных кружков справедлива оценка

$$\left\|R(\rho^2)\right\| \le \frac{C_\delta}{|\rho|}, |\rho| \ge r_0. \tag{32}$$

Имея оценку (32) , стандартным методом (см напр. [13, стр. 445]) получаем, что собственные векторы оператора L образуют полную систему в пространстве $L_p\,(0,1) \oplus C$.

Заметим, что у системы $\{\hat{u}_n\}_{n\in N_0}$ собственных векторов оператора L существует биортогонально – сопряженная система $\{\hat{v}_n\}_{n\in N_0}$, которая является системой собственных векторов сопряженного оператора L^*, который в свою очередь является линеаризующим оператором сопряженной спектральной задачи :

$$v'' + \lambda v = 0, x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right), \tag{1*}$$

$$v(0) = v(1) = 0,$$
$$v\left(\frac{1}{3} - 0\right) = v\left(\frac{1}{3} + 0\right), \qquad (2^*)$$
$$v'\left(\frac{1}{3} - 0\right) - v'\left(\frac{1}{3} + 0\right) = \lambda \bar{m} v\left(\frac{1}{3}\right).$$

□

С учетом этого из теоремы 2 следует

Следствие 4.1. *Система $\{\hat{u}_n\}_{n\in N_0}$ собственных векторов оператора* L *является полной и минимальной в пространстве $L_p(0,1)\oplus C$, $1<p<\infty$.*

Теперь рассмотрим вопрос полноты и минимальности системы $\{u_n\}_{n\in N_0}$ собственных функций задачи (1), (2). Очевидно, что это система является переполненной в пространстве $L_p(0,1)$: одна функция этой системы является лишней. Выясним следующий вопрос: какую функцию можно исключить из этой системы с сохранением свойства полноты и минимальности, а какую - нельзя? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть n_0 какой- нибудь номер из множества индексов N_0. Если n_0 четное число , то система $\{u_n\}_{n\in N_0\backslash\{n_0\}}$ является полной и минимальной в пространстве $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, если же n_0 нечетное число, то система $\{u_n\}_{n\in N_0\backslash\{n_0\}}$ не полна и не минимальна в этом пространстве.*

Доказательство. Согласно вышеотмеченному система $\{\hat{u}_n\}_{n\in N_0}$ имеет биортогонально-сопряженную систему $\{\hat{v}_n\}_{n\in N_0}$, где

$$\hat{v}_n = \left(v_n(x);\, \bar{m} v_n\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

а $v_n(x)$ являются собственными функциями сопряженной задачи (1^*), (2^*). Проводя аналогичные вычисления для собственных функций, получим, что для них справедливы формулы

$$v_{2n-1}(x) = c_{1n}\sin 3\pi n x,\ n = 1, 2...,$$

$$v_{2n}(x) = \begin{cases} c_{2n}\left(\sin\rho_{2n}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sin\rho_{2n}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right), & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right], \\ c_{2n}\sin\rho_{2n}(1-x), & x\in\left[\frac{1}{3};1\right], \end{cases}$$

где c_{1n}, c_{2n}–нормировочные числа. Из этих формул видно, что если n_0 четное число, то $v_{n_0}\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$, а если n_0 не четное число, то $v_{n_0}\left(\frac{1}{3}\right)=0$. Поэтому все утверждения теоремы следуют из результатов работы [14] (см. также [15], [16]).

□

Список литературы

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука,1977, 766 с.

[2] Аткинсон Ф.Б. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968, 749 с.

[3] Л. Коллатц. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968, 504 с.

[4] T.B. Gasymov, Sh.J. Mammadova. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. Of NAS of Azerb., 2006, vol. XXVI,(4), p. 103-116.

[5] Т.Б. Касумов, А.А. Гусейнли. О полноте собственных и присоединенных функций одного разрывного дифференциального оператора второго порядка. Доклады НАНА, LXIII, 2012, №1, с. 3-7.

[6] Н.Ю. Капустин, Е.И. Моисеев, О базисности в систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения, 2000, т.36, № 10, с. 1498-1501

[7] Н.Ю. Капустин, Е.И. Моисеев, О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения, 1997, т.33, № 1, с. 115-119.

[8] Н.Б. Керимов, В.С. Мирзоев, О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Сиб. мат. журн. 2003, т. 44, № 5, с. 1041-1045.

[9]] N.B.Kerimov, R.G.Poladov. On basicity in of the system of eigenfunctions of one boundary value problem. II.Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2005, vol. XXIII, p. 65-76.

[10] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные дифференциальные операторы). М., 1969, 528 с.

[11] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука,1969, 526 с.

[12] Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. Киев, 1983, 212 с.

[13] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, т.3., Спектральные операторы. М.: Мир, 1971, 661 с.

[14] Gasymov T.B. On necessary and sufficient conditions of basicity of some defective systems in Banach spaces // Trans. NAS Azerb., ser. phys.-tech. math. sci., math.mech., 2006, v.26, №1, p. 65-70.

[15] Gasymov T.B., Garayev T.Z. On defective bases from the root elements of differential operators containing a spectral parameter in the boundary conditions // Trans. NAS Azerb., ser. phys.-tech. math. sci., 2007, v.27, №1, p. 51-54.

[16] B.T. Bilalov, T.R. Muradov. Defective bases of Banach spaces. Proc. IMM NAS Azerb., 2005, vol. XXII, p. 23-26

Г.В. Магеррамова
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан
Email: g.meherremova.89@mail.ru