Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 10, No 2, 2020, December
ISSN 2222-5498

Completeness and minimality of eigenfunctions of a spectral problem in spaces $L_p \oplus C$ and L_p

T.B. Gasymov, G.V. Maharramova*, T.F. Kasimov

Abstract. In this paper, a spectral problem for a second-order discontinuous differential operator with a complex-valued summable potential is studied, moreover the spectral parameter linearly enters both the equation and the discontinuity condition. The resolvent of the linearized operator is constructed and an estimate for the resolvent with respect to the spectral parameter is obtained. Theorems on the completeness and minimality of the eigen and associated functions of the spectral problem in spaces $L_p \oplus C$ and L_p are proved.

Key Words and Phrases: eigenvalues and eigenfunctions, discontinuous differential operator, minimality, completeness.

2010 Mathematics Subject Classifications: 134L10; 34L30

---

*Corresponding author.

Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 10, No 2, 2020, December
ISSN 2222-5498

О полноте и минимальности собственных функций одной спектральной задачи в пространствах $L_p \oplus C$ и L_p

Т.Б. Касумов, Г.В. Магеррамова, Т.Ф. Касимов

Аннотация. В работе изучается спектральная задача для разрывного дифференциального оператора второго порядка с комплекснозначным суммируемым потенциалом, причем спектральный параметр линейно входит как в уравнение, так и в условие разрыва. Построена резольвента линеаризующего оператора и получена оценка резольвенты по спектральному параметру. Доказаны теоремы о полноте и минимальности собственных и присоединенных функций спектральной задачи в пространствах $L_p \oplus C$ и L_p.

Ключевые слова: собственные значения и собственные функции, разрывный дифференциальный оператор, минимальность, полнота.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34L10; 34L30

1. Введение

Рассматривается следующая спектральная задача с точкой разрыва:

$$l\,(y) = -y'' + q\,(x)\,y = \lambda y, \quad x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}, 1\right), \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = y(1) = 0, \\ y(\frac{1}{3} - 0) = y(\frac{1}{3} + 0), \\ y'(\frac{1}{3} - 0) - y'(\frac{1}{3} + 0) = \lambda m y(\frac{1}{3}), \end{array}\right\} \tag{2}$$

здесь $q\,(x)$ - комплекснозначная суммируемая функция, λ - спектральный параметр, m – ненулевое комплексное число. Подобная спектральная задача возникает при решении методом Фурье задачи колебания нагруженной струны с закрепленными концами. Практическая значимость таких задач отмечены в известных монографиях (см. например [1-3]). В случае, когда груз закреплен в середине струны, некоторые аспекты этой спектральной задачи изучены в [4,5]. В работе [6] найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (1),(2). В работах [7-11] задача (1),(2) рассматривался в частном случае $q\,(x) \equiv 0$, где доказаны теоремы о полноте и базисности собсвенных функций в пространствах $L_p \oplus C$ и L_p, в весовых пространствах Лебега, а также в пространствах типа Морри-Лебега. Отметим также работы [12-15], где с применением различных методов изучены спектральные свойства вышеупомянутой задачи в случаях, когда груз закреплен в одном или двух концах струны.

Спектральные задачи с точкой разрыва и со спектральным параметром в граничных условиях рассматривались в работах [16-18]. Такие задачи играют важную роль в математике, механике, физике и в других областях естествознания, и их применения связаны с разрывностью физических свойств материала. Изучение базисных свойств спектральных задач с точкой разрыва требует привлечения иных методов исследования, отличных от ранее известных. В работах [19,20] предложен новый способ исследования базисных свойств разрывных дифференциальных операторов. В настоящей работе используя методы работ [19,20], исследуется полнота и минимальность собственных и присоединенных функций задачи (1),(2) в более общем случае, чем в [7-11].

2. Необходимые сведения и вспомогательные результаты

При получении основных результатов нам понадобяться некоторые абстрактные результаты о полных и минимальных системах в прямой сумме банаховых пространств. Пусть $X_1 = X \oplus C^m$ и $\{\hat{u}_n\}_{n\in N} \subset X_1$ некоторая минимальная система, а $\left\{\hat{\vartheta}_n\right\}_{n\in N} \subset X_1^* = X^* \oplus C^m$ ее биортогональная система :

$$\hat{u}_n = (u_n; \alpha_{n1}, ..., \alpha_{nm})\,; \quad \hat{\vartheta}_n = (\vartheta_n; \beta_{n1}, ..., \beta_{nm})\,.$$

Пусть $J = \{n_1, ..., n_m\}$ некоторый набор m натуральных чисел и $N_J = N\backslash J$. Положим

$$\delta = \det \|\beta_{n_i j}\|_{i,j=\overline{1,m}}\,.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. [21, 22] *Пусть $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ минимальна в X_1 с сопряженной $\left\{\hat{\vartheta}_n\right\}_{n\in N} \subset X_1^*$. Если $\delta \neq 0$, то система $\{u_n\}_{n\in N_J}$ является минимальной в X. При этом биортогонально-сопряженная система имеет вид*

$$\vartheta_n^* = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \vartheta_n & \vartheta_{n1} & \vartheta_{nm} \\ \beta_{n1} & \beta_{n_1 1} & \beta_{n_m 1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \beta_{nm} & \beta_{n_1 m} & \beta_{n_m m} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Если $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ полна и минимальна в X_1 и $\delta \neq 0$, то $\{u_n\}_{n\in N_0}$ полна и минимальна в X. Если же $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ полна и минимальна в X_1, и $\delta = 0$, то система $\{u_n\}_{n\in N_0}$ не полна в X.

Пусть имеет место прямое разложение $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$, где $X_i, i = \overline{1,m}$, некоторые банаховы пространства. Для удобства элементы пространства X будем отождествлять с вектором $x \in X \;\Leftrightarrow\; x = (x_1, ..., x_m)$, где $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, m}$. Норму в X определим по формуле $\|x\|_X = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}^2}$. Ясно, что $X^* = X_1^* \oplus \ldots \oplus X_m^*$ и для $f \in X^*$ и $x \in X$ имеет место $< x , f >= \sum_{i=1}^m < x_i, f_i >$ ($< \cdot \, , \, \cdot >$ –значение функционала), где $f = (f_1, ..., f_m)$, $f_i \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$. Для $x_i \in X_i$ через $\tilde{x}_i$ обозначим элемент из X, определяемый равенством $\tilde{x}_i = \left(\underbrace{0, ..., x_i}_{i}, ..., 0 \right)$.

Пусть в каждом пространстве X_i, $i = \overline{1, m}$, задана некоторая система $\{u_{in}\}_{n \in N}$. Рассмотрим в пространстве X следующую систему:

$$\hat{u}_{in} = (a_{i1}^{(n)} u_{1n}, ..., a_{im}^{(n)} u_{mn}), i = \overline{1, m}, n \in N. \tag{4}$$

где $a_{ik}^{(n)}$–некоторые комплексные числа. Положим $A_n = \left(a_{ik}^{(n)} \right)_{i,k=\overline{1,m}}$ и $\Delta_n = \det A_n$. Систему (4) можно представить в виде

$$\hat{u}_{in} = \sum_{k=1}^m a_{ik}^{(n)} \tilde{u}_{kn}, \quad i = \overline{1, m}; n \in N.$$

В работе [8] доказана следующая

Теорема 2.2. [8] *Пусть система $\{u_{in}\}_{n \in N}$ полна (минимальна) в пространстве X_i, $i = \overline{1, m}$. Если выполняется условие $\Delta_n \neq 0$, $\forall n \in N$, то система $\{\hat{u}_{in}\}_{i=\overline{1,m}; n \in N}$, определенная формулой* (4)*, образует полную (минимальную) систему в пространстве X. Если система $\{u_{in}\}_{n \in N}$ полна и минимальна в пространстве X_i, $i = \overline{1, m}$, и $\exists n_0 \in N$, $\Delta_{n_0} = 0$,то система $\{\hat{u}_{in}\}_{i=\overline{1,m}; n \in N}$ не полна и не минимальна в пространстве X.*

Построим линеаризующий оператор спектральной задачи (1),(2). Через$W_p^k \left(0, \frac{1}{3}\right) \oplus W_p^k \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ обозначим пространство функций, сужения на отрезки $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ которых принадлежат соболевским пространствам $W_p^k \left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $W_p^k \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, соответственно. Определим оператор L в протстранстве $L_p(0, 1) \oplus C$ следующим образом:

$$D\left(L\right) = \Big\{ \widehat{u} \in L_p(0, 1) \oplus C : \widehat{u} = \left(u\left(x\right);\; mu\left(\tfrac{1}{3}\right) \right),\; u \in W_p^2 \left(0, \tfrac{1}{3}\right) \oplus W_p^2 \left(\tfrac{1}{3}, 1\right), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u\left(\tfrac{1}{3} - 0\right) = u\left(\tfrac{1}{3} + 0\right) \Big\} \tag{5}$$

и для $\widehat{u} \in D\left(L\right)$

$$L\,\widehat{u} = \left(l\left(u\right);\; u'\left(\frac{1}{3} - 0\right) - u'\left(\frac{1}{3} + 0\right) \right). \tag{6}$$

Теорема 2.3. *Оператор L, ореределенный формулами* (5)*,(6), является линейным плотно определенным замкнутым оператором в $L_p(0, 1) \oplus C$ и имеет компактную резольвенту. Собственные значения оператора L и спектральной задачи* (1)*,(2)* *совпадают, а между соответствующими корневыми векторами имеется взаимно-однозначное соответствие: если* $u\left(x\right)$ *корневая функция задачи* (1),*(2), соответствующая собственному значению* λ, *то* $\widehat{u}=\left(u\left(x\right);\,mu\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ *- корневой вектор оператора*L, *соответствующий тому же собственному значению* λ.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы возьмем $\widehat{u}=(u,\alpha)\in L_p(0,1)\oplus C$ и определим функционал $F(\widehat{u})$ следующим образом:

$$F(\widehat{u})=mu\left(\frac{1}{3}\right)-\alpha \tag{7}$$

Определим также в $L_p(0,1)\oplus C$ следующие функционалы

$$U_\nu(\widehat{u})=U_\nu(u),\nu=1,2,3. \tag{8}$$

Тогда функционалы $F,U_\nu,\nu=1,2,3$, ограничены в $W_p^2\left(0,\frac{1}{3}\right)\oplus W_p^2\left(\frac{1}{3},1\right)\oplus C$ и неограничены в $L_p(0,1)\oplus C$. Определим максимальный оператор M следующим образом:

$$D\left(M\right)=\left\{\widehat{u}=(u;\;\alpha):\;u\in W_p^2\left(0,\frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3},1\right),\;\;u\left(\frac{1}{3}-0\right)=u\left(\frac{1}{3}+0\right),\;\alpha=mu\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$

и $\forall\hat{u}\in D\left(M\right):M\hat{u}=\left(l\left(u\right);u'\left(\frac{1}{3}-0\right)-u'\left(\frac{1}{3}+0\right)\right)$. Одновременно определим минимальный оператор M_0:

$$D\left(M_0\right)=\left\{\begin{array}{l}\widehat{u}=(u;\;\alpha):\;u\in W_p^2\left(0,\frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3},1\right),\;\;u^{(i)}\left(0\right)=u^{(i)}\left(1\right)=0,i=1,2,\\ u'\left(\frac{1}{3}-0\right)=u'\left(\frac{1}{3}+0\right)=0,\;u\left(\frac{1}{3}-0\right)=u\left(\frac{1}{3}+0\right)\;,\;\alpha=mu\left(\frac{1}{3}\right)\end{array}\right\}.$$

Очевидно, что $M_0\subset L\subset M$.
Теперь рассмотрим сопряженную спектральную задачу :

$$l^*\left(\vartheta\right)=-\vartheta''+\overline{q\left(x\right)}\vartheta=\lambda\vartheta,\quad x\in\left(0,\;\frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3},\;1\right), \tag{9}$$

$$\begin{array}{l}\vartheta\left(0\right)=\vartheta\left(1\right)=0,\\ \vartheta\left(\frac{1}{3}-0\right)=\vartheta\left(\frac{1}{3}+0\right),\\ \vartheta'\left(\frac{1}{3}-0\right)-\vartheta\left(\frac{1}{3}+0\right)=\lambda\overline{m}\vartheta\left(\frac{1}{3}\right).\end{array} \tag{10}$$

Линеаризиющим оператором задачи (9), (10) является сопряженный операторL^*, действующий в пространстве $L_q(0,1)\oplus C$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Аналогично определяются максимальный и минимальный операторы T и T_0, порожденные сопряженной задачей (9), (10) в пространстве $L_q(0,1)\oplus C$. Для них также выполняются соотношения$T_0\subset L^*\subset T$. С другой стороны, $\forall\hat{u}\in D\left(L_0\right)$ и $\forall\hat{\vartheta}\in D\left(T\right)$ имеем

$$\begin{array}{l}\left\langle M_0\hat{u},\hat{\vartheta}\right\rangle=\int_0^1 l\left(u\right)\overline{\vartheta\left(x\right)}dx+\left(u'\left(\frac{1}{3}-0\right)-u'\left(\frac{1}{3}+0\right)\right)\overline{\overline{m}\vartheta\left(\frac{1}{3}\right)}=\int_0^1 u\left(x\right)\overline{l^*\left(\vartheta\right)}dx+\\ +\left[-u\overline{\vartheta'}+u'\overline{\vartheta}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{3}-0}+\left[-u\overline{\vartheta'}+u'\overline{\vartheta}\right]_{x=\frac{1}{3}+0}^{x=1}+\left(u'\left(\frac{1}{3}-0\right)-u'\left(\frac{1}{3}+0\right)\right)m\overline{\vartheta\left(\frac{1}{3}\right)}=\\ =\int_0^1 u\left(x\right)\overline{l^*\left(\vartheta\right)}dx+mu\left(\frac{1}{3}\right)\overline{\left(\vartheta'\left(\frac{1}{3}-0\right)-\vartheta'\left(\frac{1}{3}+0\right)\right)}=\left\langle\hat{u},T\hat{\vartheta}\right\rangle.\end{array}$$

Аналогично проверяется соотношение $\left\langle M_0\hat{u},\hat{\vartheta}\right\rangle = \left\langle \hat{u},T\hat{\vartheta}\right\rangle$, $\forall\hat{u}\in D(L)$, $\forall\hat{\vartheta}\in D(T_0)$. Из этих соотношений следует, что

$$M_0^* = T; \quad T_0^* = M.$$

Так как минимальный операторM_0 является конечномерным сужением соответствующего оператора Коши, получаем, что M_0 - плотно определенный замкнутый оператор. Кроме этого, оператор Коши имеет компактную резольвенту, и поэтому оператор L как конечномерное расширение минимального оператора (или же как конечномерное сужение максимального оператора) также имеет компактную резольвенту (см. [25,26]).

Вторя часть теоремы проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Теперь построим резольвенту оператора L. Для этого сперва построим функцию Грина задачи (1),(2). Она строится как ядро интегрального представления решения неоднородного уравнения

$$-y''(x) + q(x)\,y(x) - \lambda y(x) = f(x), \tag{11}$$

удовлетворяющего граничным условиям (2). Общее решение задачи (11),(2) ищем в виде

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right], \\ y_2(x), & x\in\left[\frac{1}{3},1\right], \end{cases} \tag{12}$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных на каждом отрезке $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3},1\right]$, поищем функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) + y_{01}(x), & x\in\left[0,\ \frac{1}{3}\right], \\ y_2(x) = c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) + y_{02}(x), & x\in\left[\frac{1}{3},\ 1\right], \end{cases} \tag{13}$$

здесь $y_{i1}(x)$, $y_{i2}(x)$, $i=1,2,$ - фундаментальные решения уравнения (1) соответственно в отрезках $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3},1\right]$, а функции $y_{01}(x)$, $y_{02}(x)$ - частные решения уравнения (11) соответственно в отрезках $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3},1\right]$. Согласно методу вариации произвольных постоянных для частных решений справедливы следующие формулы:

$$\begin{cases} y_{01}(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} g_1(x,\xi,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi, \\ y_{02}(x) = \int_{\frac{1}{3}}^1 g_2(x,\xi,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$g_1(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{2W_1(\xi)}\left(y_{11}(x)\,y_{12}(\xi) - y_{12}(x)\,y_{11}(\xi)\right), & x<\xi, \\ \frac{1}{2W_1(\xi)}\left(y_{11}(x)\,y_{12}(\xi) - y_{12}(x)\,y_{11}(\xi)\right), & x>\xi, \end{cases} \tag{15}$$

$$g_2(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{2W_2(\xi)}\left(y_{21}(x)\,y_{22}(\xi) - y_{22}(x)\,y_{21}(\xi)\right), & x<\xi, \\ \frac{1}{2W_2(\xi)}\left(y_{21}(x)\,y_{22}(\xi) - y_{22}(x)\,y_{21}(\xi)\right), & x>\xi, \end{cases} \tag{16}$$

здесь $W_k(\xi)$, $k = 1,2,$ является определителем Вронского для функций $y_{k1}(\xi), y_{k2}(\xi), k = 1,2.$Потребуем, чтобы функция $y(x)$, определенная равенствами

(12)-(16), удовлетворяла граничным условиям (2). Перепишем граничные формы, входящие в (2) в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} U_\nu\left(y\right)=U_{\nu 1}\left(y\right)+U_{\nu 2}\left(y\right), \\ \nu=\overline{1,4}, \end{array}\right\} \tag{17}$$

здесь обозначены

$$U_{11}(y)=y(0), U_{12}(y)\equiv 0,$$

$$U_{21}(y)\equiv 0, U_{22}(y)=y(1),$$

$$U_{31}(y)=y(\frac{1}{3}-0), U_{32}(y)=-y(\frac{1}{3}+0),$$

$$U_{41}(y)=y'(\frac{1}{3}-0), U_{42}(y)=-y'(\frac{1}{3}+0)-\lambda m y(\frac{1}{3}+0).$$

Тогда для нахождения неизвестных $c_{j,k}$ получим систему линейных алгебраических уравнений ,

$$\left\{\begin{array}{l} U_\nu\left(y\right)=\sum_{j,k=1}^{2} c_{jk}U_{\nu j}\left(y_{jk}\right)+\int_0^{\frac{1}{3}} U_{\nu 1}\left(g_1\right) f\left(\xi\right) d\xi+\int_{\frac{1}{3}}^{1} U_{\nu 2}\left(g_2\right) f\left(\xi\right) d\xi=0, \\ \nu=\overline{1,4}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Определив числа $c_{j,k}$ из (18) и подставив их значения в (13), для функций $y_1\left(x\right)$, $y_2\left(x\right)$ получим следующие формулы:

$$\begin{array}{ll} y_1(x)=\int_0^{\frac{1}{3}} G_{11}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi+\int_{\frac{1}{3}}^{1} G_{12}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right], \\ y_2(x)=\int_0^{\frac{1}{3}} G_{21}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi+\int_{\frac{1}{3}}^{1} G_{22}(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, & x\in\left[\frac{1}{3},1\right]. \end{array} \tag{19}$$

С учетом последнего из (12), после соответствующих преобразований, получаем, что решения задачи (11),(2) представляется в виде:

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi, \tag{20}$$

здесь

$$G\left(x,\xi,\lambda\right)=\sum_{i,j=1}^{2}\chi_i\left(x\right)\chi_j\left(\xi\right)G_{ij}\left(x,\xi,\lambda\right); \quad G_{ij}\left(x,\xi,\lambda\right)=\frac{1}{\Delta\left(\lambda\right)}H_{ij}\left(x,\xi,\lambda\right); \tag{21}$$

$\chi_1\left(\cdot\right)$, $\chi_2\left(\cdot\right)$ - характеристические функции промежутков $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и $\left(\frac{1}{3},\ 1\right]$ соответственно, а функции $H_{ij}\left(x,\xi,\lambda\right),\ i,j=1,2$, определяются следующими формулами:

$$H_{ij}(x,\xi,\rho)=\begin{vmatrix} \delta_{ij}g_j & \chi_1\left(x\right)y_{11}\left(x\right) & \chi_1\left(x\right)y_{12}\left(x\right) & \chi_2\left(x\right)y_{21}\left(x\right) & \chi_2\left(x\right)y_{22}\left(x\right) \\ U_{1j}\left(g_j\right) & U_{11}\left(y_{11}\right) & U_{11}\left(y_{12}\right) & U_{12}\left(y_{21}\right) & U_{12}\left(y_{22}\right) \\ U_{2j}\left(g_j\right) & U_{21}\left(y_{11}\right) & U_{21}\left(y_{12}\right) & U_{22}\left(y_{21}\right) & U_{22}\left(y_{22}\right) \\ U_{3j}\left(g_j\right) & U_{31}\left(y_{11}\right) & U_{31}\left(y_{12}\right) & U_{32}\left(y_{21}\right) & U_{32}\left(y_{22}\right) \\ U_{4j}\left(g_j\right) & U_{41}\left(y_{11}\right) & U_{41}\left(y_{12}\right) & U_{42}\left(y_{21}\right) & U_{42}\left(y_{22}\right) \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Для построения резольвенты оператора L рассмотрим уравнение

$$L\hat{u}-\lambda\,\widehat{u}=\widehat{f} \tag{23}$$

здесь $\widehat{u}\in D\left(L\right),\quad \widehat{f}=\left(f,\beta\right)\in L_p(0,1)\oplus C$. Перепишем уравнение (23) покомпонентно в следующем виде:

$$\begin{cases} l\left(u\right)=\lambda u+f, \\ u'\left(\frac{1}{3}-0\right)-u'\left(\frac{1}{3}+0\right)-\lambda m u\left(\frac{1}{3}\right)=\beta, \quad (23`) \\ U_\nu(u)=0, \quad \nu=1,2,3. \end{cases}$$

Решение уравнения (23`) поищем в следующем виде:

$$u(x,\lambda)=\begin{cases} C_{11}y_{11}(x)+C_{12}y_{12}(x)+y_1(x),\ \ x\in\left[0,\frac{1}{3}\right], \\ C_{21}y_{21}(x)+C_{22}y_{22}(x)+y_2(x), x\in\left[\frac{1}{3},1\right], \end{cases} \tag{24}$$

здесь функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены формулами (19). Так как функция $y(x)$, определенная формулой (20) удовлетворяет граничным условиям (2), можно написать

$$\begin{cases} U_\nu(y)=0, \\ \nu=\overline{1,4}, \end{cases} \tag{25}$$

Потребуем, чтобы функция $u(x,\rho)$ удовлетворяла условиям

$$\begin{cases} U_\nu(u)=0,\nu=\overline{1,3}, \\ U_4(u)=\beta, \end{cases}$$

Тогда с учетом (25) из (24) получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_{11}U_{\nu1}(y_{11})+C_{12}U_{\nu1}(y_{12})+C_{21}U_{\nu2}(y_{21})+C_{22}U_{\nu2}(y_{22})=0,\nu=\overline{1,3}, \\ C_{11}U_{41}(y_{11})+C_{12}U_{41}(y_{12})+C_{21}U_{42}(y_{21})+C_{22}U_{42}(y_{22})=\beta. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно C_{kj} получим

$$C_{11} = -\tfrac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{11}(y_{12}) \left[U_{22}(y_{21})U_{32}(y_{22}) - U_{22}(y_{22})U_{32}(y_{21})\right],$$

$$C_{12} = \tfrac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{11}(y_{11}) \left[U_{22}(y_{21})U_{32}(y_{22}) - U_{22}(y_{22})U_{32}(y_{21})\right],$$

$$C_{21} = \tfrac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{22}(y_{22}) \left[U_{11}(y_{11})U_{31}(y_{12}) - U_{11}(y_{12})U_{31}(y_{11})\right],$$

$$C_{22} = -\tfrac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{22}(y_{21}) \left[U_{11}(y_{11})U_{31}(y_{12}) - U_{11}(y_{12})U_{31}(y_{11})\right].$$

Подставим эти значения C_{kj} в (24). Тогда с учетом формул (20)-(22) получим следующее представление:

$$u(x) = G_0(x,\lambda,\beta) + \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi, \tag{26}$$

где

$$\begin{cases} G(x,\xi,\lambda) = \sum_{i,j=1}^{2} \chi_i(x)\chi_j(\xi) G_{ij}(x,\xi,\lambda), \\ G_{ij}(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} H_{ij}(x,\xi,\lambda), \\ G_0(x,\lambda,\beta) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} H_0(x,\lambda,\beta), \end{cases} \tag{27}$$

$$H_0(x,\lambda,\beta) = \begin{vmatrix} \chi_1(x)y_{11}(x) & \chi_1(x)y_{12}(x) & \chi_2(x)y_{21}(x) & \chi_2(x)y_{22}(x) & 0 \\ U_{11}(y_{11}) & U_{11}(y_{12}) & U_{12}(y_{21}) & U_{12}(y_{22}) & 0 \\ U_{21}(y_{11}) & U_{21}(y_{12}) & U_{22}(y_{21}) & U_{22}(y_{22}) & 0 \\ U_{31}(y_{11}) & U_{31}(y_{12}) & U_{32}(y_{21}) & U_{32}(y_{22}) & 0 \\ U_{41}(y_{11}) & U_{41}(y_{12}) & U_{42}(y_{21}) & U_{42}(y_{22}) & \beta \end{vmatrix}, \tag{28}$$

$H_{ij}(x,\xi,\lambda)$, $i,j = 1,2,$ определены формулой (22). Представление для $u\left(\frac{1}{3}\right)$ получается из (26) подстановкой $x = \frac{1}{3}$. Таким образом доказана следующая

Теорема 2.4. *При всех значениях параметра λ, удовлетворяющего условию $\Delta(\lambda) \neq 0$ и для любого $\widehat{f} = (f,\beta) \in L_p(0,1) \oplus C$ уравнение (23) имеет единственное решение $\widehat{u} = \left(u, mu\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ и для этого решения справедливы формулы (26)-(28). Собственными значениями оператора L могут быть лишь нули функции $\Delta(\lambda)$ и поэтому их не более чем счетное число с единственно возможной предельной точкой в бесконечности. Корневые вектора оператора L образуют минимальную систему в пространстве $L_p(0,1) \oplus C$.*

Нам понадобятся также некоторые результаты из работы [6]. Для их формулировки введем следующие функции:

$$q_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, dt, q_2(x) = \frac{1}{2}\int_x^1 q(t)\, dt. \tag{29}$$

Теорема 2.5. [6] *Собственные значения задачи* (1),(2) *асимптотически просты и состоят из трех серий:* $\lambda_{i,n} = \rho_{i,n}^2$, $i = 1,2,3;$ $n = 1,2,...,$ *где для чисел* $\rho_{i,n}$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_{1,n} = 3\pi n + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \rho_{2,n} = 3\pi n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \rho_{3,n} = 3\pi n - \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha_2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{array}\right. \tag{30}$$

здесь обозначены $\alpha_1 = \frac{3+2mq_1+2mq_2}{3\pi m}$, $\alpha_2 = -\frac{1+mq_2}{3\pi m}, q_1 = q_1\left(\frac{1}{3}\right)$, $q_2 = q_2\left(\frac{1}{3}\right)$.

Теорема 2.6. [6] *Для собственных функций* $y_{i,n}(x)$ *задачи (1),*(2)*, соответствующих собственным значениям* $\lambda_{i,n} = (\rho_{1,n})^2, i = 1,2,3; n \in N$*, справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$y_{1n}(x) = \left\{\begin{array}{ll} \sin 3\pi nx + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \gamma_1 \sin 3\pi nx + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \end{array}\right. \tag{31}$$

$$y_{2,n}(x) = \left\{\begin{array}{ll} \sin 3\pi nx + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \gamma_2 \sin 3\pi nx + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \end{array}\right. \tag{32}$$

$$y_{3,n}(x) = \left\{\begin{array}{ll} O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \gamma_{3,n} \cos 3\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \end{array}\right. \tag{33}$$

где обозначены $\gamma_1 = (1 + mq_1)$, $\gamma_2 = \frac{mq_1 - mq_2}{3}$, $\gamma_3 = m$.

3. Основные результаты

Из результатов предыдущего пункта (Теорема 2.4) следует, что корневые вектора оператора L, линеаризующего задачу (1),(2) образуют минимальную систему в пространстве $L_p(0,1) \oplus C$. Для исследования полноты системы корневых векторов оператора L необходимо получить оценку резольвенты по спектральному параметру. В предыдущем пункте для резольвенты получены формулы (26)-(28). Для получения асимптотической оценки резольвенты будем использовать асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения (1) в отрезках $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Эти решения обозначим через $y_{11}(x,\rho), y_{12}(x,\rho)$ и $y_{21}(x,\rho), y_{22}(x,\rho)$ соответственно. Известно, что (см.[24, стр.58-59, Теорема 1]) для этих решений справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{1k}^{(j-1)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^{j-1} e^{\rho\omega_k x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \ j,k = 1,2, \\ y_{2k}^{(j-1)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^{j-1} e^{\rho\omega_k\left(x - \frac{1}{3}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \ j,k = 1,2, \end{array}\right. \tag{34}$$

здесь $\omega_1 = -\omega_2 = i$,ρ принадлежить одному из четырех S-секторов [24, стр.62]. Учитывая формулы (**??**) в граничных формах, получим следующие асимптотические выражения:

$$\begin{cases} U_{11}(y_{11}) = [1]\,, & U_{11}(y_{12}) = [1]\,, & U_{12}(y_{21}) = 0, & U_{12}(y_{22}) = 0, \\ U_{21}(y_{11}) = 0, & U_{21}(y_{12}) = 0, & U_{22}(y_{21}) = e^{\frac{2i\rho}{3}}\,[1]\,, & U_{22}(y_{22}) = e^{-\frac{2i\rho}{3}}\,[1]\,, \\ U_{31}(y_{11}) = e^{\frac{i\rho}{3}}\,[1]\,, & U_{31}(y_{12}) = e^{-\frac{i\rho}{3}}\,[1]\,, & U_{32}(y_{21}) = -\,[1]\,, & U_{32}(y_{22}) = -\,[1]\,, \\ U_{41}(y_{11}) = i\rho e^{\frac{i\rho}{3}}\,[1]\,, & U_{41}(y_{12}) = -i\rho e^{-\frac{i\rho}{3}}\,[1]\,, & U_{42}(y_{21}) = -\rho^2 m\,[1]\,, & U_{42}(y_{22}) = -\rho^2 m\,[1]\,. \end{cases} \tag{35}$$

Здесь и в дальнейшем везде через $[a]$ обозначается асимптотические выражения вида $a + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. В формулах (15),(16) обзначим

$$z_{ik}\,(\xi) = \frac{W_{ik}\,(\xi)}{W_i\,(\xi)},\ i, k, = 1, 2, \tag{36}$$

Здесь $W_i\,(\xi)$ - вронскиан функций $y_{i1}\,(\xi)\,, y_{i2}\,(\xi)$, а $W_{ik}\,(\xi)$ - алгебраические дополнения элементов его первой строки. Для оценки резольвенты по спектральному параметру надо оценить функцию $u\,(x)$, определенной по формуле (26), а также функции $G_{ij}\,(x, \xi, \lambda)$, определенные по формуле (27). Выполним некоторые преобразования над определителями $H_{ij}\,(x, \xi, \lambda)$ из (28). Продемонстрируем эти преобразования над $H_{11}\,(x, \xi, \lambda)$, а для других определителей это делается аналогично. Для определенности рассмотрим случай $0 \le \xi < x \le \frac{1}{3}$. В этом случае согласно формуле (28) имеем

$$H_{11}\,(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} y_{11}\,(x) & y_{12}\,(x) & 0 & 0 & g_1\,(x, \xi) \\ U_{11}\,(y_{11}) & U_{11}\,(y_{12}) & U_{12}\,(y_{21}) & U_{12}\,(y_{22}) & U_{11}\,(g_1) \\ U_{21}\,(y_{11}) & U_{21}\,(y_{12}) & U_{22}\,(y_{21}) & U_{22}\,(y_{22}) & U_{21}\,(g_1) \\ U_{31}\,(y_{11}) & U_{31}\,(y_{12}) & U_{32}\,(y_{21}) & U_{32}\,(y_{22}) & U_{31}\,(g_1) \\ U_{41}\,(y_{11}) & U_{41}\,(y_{12}) & U_{42}\,(y_{21}) & U_{42}\,(y_{22}) & U_{41}\,(g_1) \end{vmatrix} \tag{37}$$

А также согласно формуле (36) имеем

$$z_{11}\,(\xi) = \frac{y_{12}\,(\xi)}{W_1\,(\xi)},\ z_{12}\,(\xi) = -\frac{y_{11}\,(\xi)}{W_1\,(\xi)}$$

Учитывая эти соотношения умножим первый и второй столбец определителя (37) на $\frac{1}{2}z_{11}\,(\xi)$ и $\frac{1}{2}z_{12}\,(\xi)$, соответственно, и добавим к последнему столбцу. Тогда получим

$$H_{11}\,(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} y_{11}\,(x) & y_{12}\,(x) & 0 & 0 & y_{11}\,(x)\,z_{11}\,(\xi) \\ U_{11}\,(y_{11}) & U_{11}\,(y_{12}) & U_{12}\,(y_{21}) & U_{12}\,(y_{22}) & U_{11}\,(y_{11})\,z_{11}\,(\xi) \\ U_{21}\,(y_{11}) & U_{21}\,(y_{12}) & U_{22}\,(y_{21}) & U_{22}\,(y_{22}) & 0 \\ U_{31}\,(y_{11}) & U_{31}\,(y_{12}) & U_{32}\,(y_{21}) & U_{32}\,(y_{22}) & U_{31}\,(y_{11})\,z_{11}\,(\xi) \\ U_{41}\,(y_{11}) & U_{41}\,(y_{12}) & U_{42}\,(y_{21}) & U_{42}\,(y_{22}) & U_{41}\,(y_{11})\,z_{11}\,(\xi) \end{vmatrix}. \tag{38}$$

С другой стороны, на основании формул (34) имеем

$$W_1\,(\xi) = y_{11}'\,(\xi)\,y_{12}\,(\xi) - y_{12}'\,(\xi)\,y_{11}\,(\xi) = 2i\,[1]\,,$$

поэтому,

$$z_{11}(\xi) = \frac{1}{2i} e^{-i\rho\xi} [1], z_{12}(\xi) = -\frac{1}{2i} e^{i\rho\xi} [1]. \tag{39}$$

Учитывая теперь (35) и (39) в (38), и упростив полученные определители, получим

$$H_{11}(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} e^{i\rho x}[1] & e^{-i\rho x}[1] & 0 & 0 & e^{i\rho(x-\xi)}[1] \\ [1] & [1] & 0 & 0 & e^{i\rho\xi}[1] \\ 0 & 0 & e^{\frac{2i\rho}{3}}[1] & e^{-\frac{2i\rho}{3}}[1] & 0 \\ e^{\frac{i\rho}{3}}[1] & e^{-\frac{i\rho}{3}}[1] & -[1] & -[1] & e^{i\rho\left(\frac{1}{3}-\xi\right)}[1] \\ e^{\frac{i\rho}{3}}[1] & -e^{-\frac{i\rho}{3}}[1] & i\rho m[1] & i\rho m[1] & e^{i\rho\left(\frac{1}{3}-\xi\right)}[1] \end{vmatrix}. \tag{40}$$

А для функции $\Delta(\rho)$, на основании формул (35), получается следующее асимптотическое выражение:

$$\Delta(\rho) = \det \|U_{\nu k}(y_{kj})\|_{k,j=1,2;\, \nu=\overline{1,4}} =$$

$$= \begin{vmatrix} [1] & [1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2i\rho}{3}}[1] & e^{-\frac{2i\rho}{3}}[1] \\ e^{\frac{i\rho}{3}}[1] & e^{-\frac{i\rho}{3}}[1] & -[1] & -[1] \\ i\rho e^{\frac{i\rho}{3}}[1] & -i\rho e^{-\frac{i\rho}{3}}[1] & -\rho^2 m[1] & -\rho^2 m[1] \end{vmatrix} = \tag{41}$$

$$= i\rho\left(-i\rho m\left(e^{\frac{i\rho}{3}}[1] + e^{-\frac{i\rho}{3}}[1]\right) + i\rho m\left(e^{i\rho}[1] + e^{-i\rho}[1]\right) + 2\left(e^{i\rho}[1] - e^{-i\rho}[1]\right)\right).$$

Как отмечено выше, комплексная ρ-плоскость разбита на четыре сектора $S_{\nu-1}, \nu = \overline{1,4}$, в каждом из которых справедливы формулы (34). Эти сектора совпадают соответственно, с I, II, III, IV четвертями комплексной ρ-плоскости. Предположим, что $\rho \in S_0 \bigcup S_1$. Тогда $Im\rho \geq 0$ и, следовательно, $Re(i\rho) \leq 0 \leq Re(-i\rho)$. С учетом этого, из (41) при больших значениях $|\rho|$ в области K_δ, являющейся внешностью кружков с центрами в нулях $\Delta(\rho)$ и с одинаковыми радиусами δ справедлива следующая оценка:

$$|\Delta(\rho)| \geq m_\delta |\rho|^2 |m| e^{-Re(i\rho)}. \tag{42}$$

Теперь можем перейти к непосредственной оценки резольвенты $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$. Пусть Ω_δ образ области K_δ в комплексной λ-плоскости при отображении $\lambda = \rho^2$.

Теорема 3.1. *Для резольвенты оператора L, линеаризующего спектральную задачу* (1),(2), *в области Ω_δ при больших значениях $|\lambda|$ справедлива следующая оценка:*

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}. \tag{43}$$

Доказательство. Для оценки резольвенты необходимо оценить пару $\left(u(x), mu\left(\frac{1}{3}\right)\right)$как элемент пространства $L_p(0,1) \oplus C$. Сперва оценим функции $G(x,\xi,\lambda)$ и $G_0(x,\lambda,\beta)$. Для оценки $G(x,\xi,\lambda)$ надо оценить каждую компаненту

$G_{ij}(x,\xi,\lambda)$. Для определенности оценим $G_{11}(x,\xi,\lambda)$. Так как $\lambda=\rho^2$, то достаточно рассмотреть только случай $\rho\in S_0\bigcup S_1$. При $\rho\in К_\delta$и при больших значениях$|\rho|$, учитывая соотношения (40) и (42), из (27) получим

$$|G_{11}(x,\xi,\lambda)|=\frac{1}{|\Delta(\rho)|}|H_{11}(x,\xi,\rho)|\le\frac{1}{m_\delta|\rho|^2|m|e^{Im\rho}}|H_{11}(x,\xi,\rho)|. \tag{44}$$

В формуле (40) функции $H_{11}(x,\xi,\rho)$ в первом, третьем и пятом столбце все компоненты имеють вид экспоненты с отрицательным показателем, и поэтому ограничены. Если выности из второй, четвертой и пятой строки соответственно $e^{\frac{1}{3}Im\rho}$, $e^{\frac{2}{3}Im\rho}$ и ρm, как общий множитель, то у полученного определителя все компоненты будут ограниченными равномерно по $x,\xi\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$. Учитывая это в (44) получим, что равномерно по $x,\xi\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и при $\rho\in К_\delta,|\rho|\ge r_0$, справедливо неравенство $|H_{11}(x,\xi,\rho)|\le const\cdot|\rho m|e^{Im\rho}$, а отсюда и неравенство

$$|G_{11}(x,\xi,\lambda)|\le\frac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}},\lambda\in\Omega_\delta,|\lambda|\ge r_0^2.$$

Аналогично показывается, что такая же оценка верна и для других компонентов, а также и для функции $G_0(x,\lambda,\beta)$. Следовательно, равномерно по $x,\xi\in[0,1]$ и при $\lambda\in\Omega_\delta,|\lambda|\ge r_0^2$, верны неравенства

$$|G(x,\xi,\lambda)|\le\frac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \tag{45}$$

и

$$|G_0(x,\lambda,\beta)|\le\frac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}|\beta| \tag{46}$$

Здесь постоянная M_δ зависит только от δ, и не зависит от переменных $x,\ \xi,\ \lambda$. Вообще говоря, в различных местах через M_δ обозначаем различные постоянные.

Оценим теперь функцию $u(x)$. Учитывая неравенства (45) и (46) в формуле (26) получим

$$\begin{aligned}|u(x)|\le|G_0(x,\lambda,\beta)|+\textstyle\int_0^1\left|\tilde{G}(x,\xi,\lambda)\right||f(\xi)|d\xi\le\\ \le\tfrac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}|\beta|+\tfrac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\textstyle\int_0^1|f(\xi)|d\xi\le\tfrac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\left(\|f\|_{L_p}+|\beta|\right).\end{aligned} \tag{47}$$

Отсюда получается неравенство

$$\|u\|_{L_p}\le\frac{M_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\left\|\hat{f}\right\|_{L_p\oplus C}.$$

Так как неравенство (47) выполняется равномерно по $x\in[0,1]$, то для оценки $\left|u\left(\frac{1}{3}\right)\right|$ достаточно положить в (47) $x=\frac{1}{3}$. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Корневые вектора* $\{\hat{y}_{in}\}_{i=\overline{1,3};n\in N}^{\infty}$*оператора* L *образуюто полную систему в пространстве* $L_p(0,1)\oplus C$, $1<p<\infty$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 для резольвенты оператора L справедлива оценка (43) . Эта оценка означает, что для резольвенты $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ верно неравенство

$$\left\| R\left(\rho^2\right) \right\| \leq \frac{C_\delta}{|\rho|},\ \rho \in K_\delta,\ |\rho| \geq r_0. \tag{48}$$

Предположим, что система корневых векторов оператора L не полна в пространстве $L_p(0,1) \oplus C$. Тогда существует вектор $\hat{g} \in L_q(0,1) \oplus C$, ортогональный всем корневым подпространствам оператора L, т.е.

$$\left\langle Q_n \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = 0, \forall \hat{f} \in L_p(0,1) \oplus C,\ n = 0, 1, 2, ...,$$

и отсюда $Q_n^* \hat{g} = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$; здесь через Q_n обозначены риссовские проекторы оператора L :

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_n| = r} R(\lambda)\, d\lambda.$$

В этом случае очевидно, что $Q_n^*,\ n \in N_0,\ \left(N_0 = N \bigcup \{0\}\right)$, будут риссовскими проекторами сопряженного оператора L^*. Отсюда следует, что $R(\lambda, L^*)\,\hat{g}$ будет целой функцией во всей λ- плоскости. С другой стороны, на основании оценки (43) верно неравенство

$$\| R(\lambda, L^*) \| \leq \frac{C_\delta}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}},\ \lambda \in \Omega_\delta,\ |\lambda| \geq r_0^2, \tag{49}$$

Тогда по принципу максимума неравенство (49) удовлетворяется во всей λ-плоскости и $R(\lambda, L^*)\,\hat{g} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, и по теореме Лиувилля это означает, что целая функция$R(\lambda, L^*)\,\hat{g}$ является постоянной функцией. Тогда продифференцируя эту функцию и учитывая, что $\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, L^*) = R^2(\lambda, L^*)$, получаем, что $R^2(\lambda, L^*)\,\hat{g} = 0$. Так как при всех $\lambda \in \rho(L^*)$ оператор $R(\lambda, L^*)$ однозначен, получаем, что $\hat{g} = 0$, а это означает, что корневые вектора оператора L образуют полную систему в пространстве $L_p(0,1) \oplus C$. Теорема доказана.

С учетом Теоремы 2.4 из Теоремы 3.2 следует следующее

Следствие 3.1. *Корневые вектора* $\{\hat{y}_{in}\}_{i=\overline{1,3}; n \in N}^{\infty}$*оператора* L *образуютъ полную и минимальную систему в пространстве* $L_p(0,1) \oplus C,\ 1 < p < \infty$.

Из Теоремы 3.2 следует также, что система собственных и присоединенных функций спектральной задачи (1),(2) переполнена в пространстве $L_p(0,1)$ и в этой системе одна функция лишняя. Поэтому выясним вопрос о том, что какую функцию можно исключить из этой системы с сохранением свойства полноты и минимальности. Пусть $\{\hat{z}_{in}\}_{i=\overline{1,3}; n \in N}^{\infty}$биортогональная к $\{\hat{y}_{in}\}_{i=\overline{1,3}; n \in N}^{\infty}$система. Она является системой корневых векторов сопряженного оператора L^*, причем $\hat{z}_{in} = \left(z_{in}(x), \bar{m} z_{in}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, где $z_{in}(x)$ является собственной или присоединенной функцией сопряженной спектральной задачи. Справедлива следующая

Теорема 3.3. *Для того чтобы система, полученная из системы собственных и присоединенных функций* $\{y_{in}(x)\}_{i=\overline{1,3}; n \in N}^{\infty}$*спектральной задачи* (1),*(2) после исключения* *некоторой функции* $y_{i_0n_0}(x)$*, была полна и минимальна в пространстве* $L_p(0,1)$*,* $1 \leq p < \infty$*, необходимо и достаточно чтобы соответствующая функция* $z_{i_0n_0}(x)$ *удовлетворяла условию* $z_{i_0n_0}\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$*.*

Доказательство следует из Теоремы 2.1.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики (№ EIF-BGM-4-RFTF-1/2017-21/02/1-M-19)

Список литературы

[1] Аткинсон Ф.Б. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968, 749 с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977, 766 с.

[3] Л.Коллатц, Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968, 504 с.

[4] Gasymov T.B., Mammadova Sh.J. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. Of NAS of Azerb. 2006,vol. XXVI, No.4, p. 103-116.

[5] Gasymov T.B., Huseynli A.A. The basis properties of eigenfunctions of a discontinuous differential operator with a spectral parameter in boundary condition // Proc. of IMM of NAS of Azerb. vol. XXXV(XLIII), 2011, pp. 21-32.

[6] Maharramova G.V. Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Spectral Problem with Discontinuity Point // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics V. 7, No 1, 2019, July,pp.114-125.

[7] Магеррамова Г.В. О полноте собственных функций одного дифференциального оператора второго порядка, Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.8, No. 2, 2018, с.45-55.

[8] Gasymov T.B., G.V. Maharramova. The stability of the basis properties of multiple systems in a Banach space with respect to certain transformations // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. V. 6, No 2, 2018, December, p. 66-77.

[9] Gasymov T.B, Maharramova G.V., Mammadova N.G. Spectral properties of a problem of vibrations of a loaded string in Lebesgue spaces. Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics.38(1).62-68(2018)Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences.

[10] Gasymov T.B, Maharramova G.V., Jabrailova A.N. Spectral properties of the problem of vibration of a loaded string in Morrey type spaces. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan.Volume 44.Number 1.2018,Pages 116-122.

[11] Билалов Б.Т., Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В. О базисности функций одной спектральной задачи с точкой разрыва в лебеговых пространствах, Дифференц. уравнения, 2019, т.55, No 12, с. 1-10.

[12] Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения, 1997, т.33, No 1, с. 115-119.

[13] Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Сиб. мат. журн. 2003, т.44, No 5, с.1041-1045.

[14] Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II // Proc. IMM NAS Azerb., 2005, v.23, p. 65-76.

[15] Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисных свойствах собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН, 2007, т.412, No 1, с. 18-21.

[16] Gomilko A.M., Pivovarchik V.N. On bases of eigenfunctions of boundary problem associated with small vibrations of damped nonsmooth inhomogeneous stirng // Asympt. Anal. 1999., v.20 No3-4, p.301-315.

[17] Shahriari M. Inverse Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Dependent Boundary and Transmission Conditions. Azerb. J. Math., 4(2) (2014), 16-30.

[18] Shahriari M., Akbarfam J.A., Teschl G. Uniqueness for inverse Sturm-Liouville problems with a finite number of transmission conditions. J.Math. Anal. Appl. 395. 19-29(2012).

[19] Bilalov B.T., Gasymov T.B. On bases for direct decomposition. Doklady Mathematics. 93(2) (2016).pp 183-185.

[20] Bilalov B.T., Gasymov T.B. On basicity a system of eigenfunctions of second order discontinuous differential operator // Ufa Mathematical Journal, 2017, v. 9, No 1, p.109-122.

[21] Gasymov T.B. On necessary and sufficient conditions of basicity of some defective systems in Banach spaces // Trans. NAS Azerb., ser. phys.-tech. math. sci., math.mech., 2006, v.26, No 1, p.65-70.

[22] Gasymov T.B., Garayev T.Z. On necessary and sufficient conditions for obtaining the bases of Banach spaces // Proc. of IMM of NAS of Azerb.2007. vol XXVI(XXXIV). P. 93-98.

[23] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, т.3., Спектральные операторы. М.: Мир, 1971, 661 с.

[24] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука,1969, 526 с.

[25] Като Т. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.

[26] Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. Киев, 1983. 212с.

Т.Б. Касумов
Институт Математики и Механики НАНА, Баку, Азербайджан
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
E-mail: telmankasumov@rambler.ru

Г.В. Магеррамова
Институт Математики и Механики НАНА, Баку, Азербайджан
E-mail: g.meherremova.89@mail.ru

Т.Ф. Касимов
Азербайджанский Технический Университет, Гянджа, Азербайджан
*E-mail:*tehransend@mail.ru

Received 15 May 2020
Accepted 24 November 2020