Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 2, No 1, 2012, July
ISSN 2222-5498

Применение метода контурного интеграла к решению задачи Коши для уравнения колебания стержня

Асадова Офеля Гасан

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию задачи Коши для уравнения гипербалического типа методом контурного интеграла. Пользуясь интегральным преобразованием Расулова М.Л., построены уравнение сдержащее комплексный параметр, фундаментальное решение и доказано справедливость нужных оценок для этого решения и его производных в определенном секторе комплексной λ-плоскости. Далее, с помошью этих оценок доказано существование решения задачи Коши и получено его представление в виде быстросходящегося контурного интеграла.

Key Words and Phrases: Задача Коши, Метод контурного интеграла

2000 Mathematics Subject Classifications: 45B47

Как известно, одним из мощных методов решения смешанных задач и задачи Коши для параболических уравнений и систем по Петровскому, является метод контурного интеграла Расулова М.Л. [1], [2]. В дальнейшем, с помощью этого метода было доказано существование и единственность решений смешанных задач для слабо-параболического уравнения [3] и задачи Коши для гиперболического уравнения [4]. Возникла идея исследовать решение задачи Коши для уравнения колебания стержня, которое не принадлежит типовой классификации по Петровскому И.Г.

Таким образом, рассматривается задача нахождения решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f\left(x,t\right), x \in \left(0, \Phi\right) \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k v\left(x,t\right)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \Phi_k\left(x\right), k = 0, 1, x \in \left(0, \infty\right) \tag{2}$$

где $f\left(x,t\right)$ и $\Phi_k\left(x\right)$, $k = 0, 1$ заданные функции. Предполагается, что выполняются условия

1. Функция $f\left(x,t\right)$ является оригиналом в смысле [2] действительного аргумента $t>0$, кроме того имеет непрерывные ограниченные производные по t до второго порядка, а по x до первого порядка

2. Функции $\Phi_k\left(x\right)$ $(k=0,1)$ являются непрерывными, ограниченными со своими производными до $(3-2k)$-го $(k=0,1)$ порядка функциями при $x\in(0,\infty)$.

Непосредственной проверкой доказывается

Теорема. При выполнении условий 1 и 2 задача (1); (2) имеет единственное решение, представимое в виде

$$v\left(x,t\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_s\lambda^2e^{\lambda^2t}d\lambda\int_0^\infty P\left(x-\xi,\lambda\right)\left\{F\left(\xi,\lambda\right)+\int_0^1e^{-\lambda^2\delta}f\left(\xi,\tau\right)d\tau\right\}d\xi, \qquad (3)$$

где

$$F\left(x,\lambda\right)=\Phi_1\left(x\right)+\lambda^2\Phi_0\left(x\right)+\overline{f}\left(x,\lambda\right), \qquad (4)$$

а S бесконечный разомкнутый контур целиком расположенный в R_δ определяемого

$$R_\delta=\left\{\lambda:|\lambda|>R;\ \frac{\pi}{4}+\delta\leq\arg\,\lambda\leq\frac{3\pi}{4}-\delta\right\} \qquad (5)$$

и бесконечно удаленные части которого совпадают с продолжениями лучей

$$\arg\,\lambda=\frac{\pi}{4}+\delta;\arg\,\lambda=\frac{3\pi}{4}\ -\delta$$

Подынтегральная функция $\mathrm{P}\left(x-\xi,\lambda\right)$ является фундаментальным решением уравнения

$$y^{IV}\left(x,\lambda\right)+\lambda^4y=F\left(x,\lambda\right) \qquad (6)$$

определяемого формулой

$$\mathrm{P}\left(x-\xi,\lambda\right)=\left\{\left(1-i\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\lambda|x-\xi|}-\left(1+i\right)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\lambda|x-\xi|}\right\}, \qquad (7)$$

а $F\left(x,\lambda\right)$ определяется формулой (4)

Для доказательства теоремы нужно доказать равномерную сходимость интеграла в правой части формулы (3) и интегралов полученных формальным дифференцированием под знаком интеграла 2 раза по t и 4 раза по x, т.е. интегралов

$$\int_S\lambda^{2k+1}e^{\lambda^2t}d\lambda\int_0^\infty\left\{\frac{\partial^sP\left(x-\xi,\lambda\right)}{\partial x^s}F\left(\xi,\lambda\right)+\int_0^te^{-\lambda^2\tau}f\left(\xi,\tau\right)d\tau\right\}d\xi,k=0,1,s=0;4\,. \qquad (8)$$

Для этого, около начала λ- плоскости опишем окружности с достаточно большими радиусами r_n и r_{n+1} и точки пересечения с лучами $\arg\lambda = \frac{\pi}{4}+\delta$ и $\arg\lambda = \frac{3\pi}{4}-\delta$ обозначим a_n, a'_n; b_n, b'_n и рассмотрим интегралы

$$\int_{a_n b_n} \lambda^{2k+1} e^{\lambda^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda(1+i)\lambda|x-\xi|} d\lambda$$

и

$$\int_{a'_n b'_n} \lambda^{2k+1} e^{\lambda^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda(1+i)\lambda|x-\xi|} d\lambda$$

$$\int_{a_n b_n} \lambda^{2k+1} e^{\lambda^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda(1-i)\lambda|x-\xi|} d\lambda$$

и

$$\int_{a'_n b'_n} \lambda^{2k+1} e^{\lambda^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\lambda|x-\xi|} d\lambda.$$

В силу выбора контура S, при $\lambda \in a_n b_n$ $\arg\lambda = \frac{\pi}{4}+\delta$; $\arg\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\left(1+i\right) = \frac{\pi}{4}+\delta$. Следовательно, $\left|e^{\lambda^2 t}\right| = e^{Re\,\lambda^2 t} = e^{|\lambda|^2 t\cos 2\arg\lambda} = e^{-|\lambda|^2 t\,\sin 2\delta}$, откуда следует, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{Re\lambda^2 t} = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\lambda|^2 t\,\sin 2\delta} = 0.$$

Аналогично, доказывается и справедливость равенства

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\lambda|x-\xi|} = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\lambda||x-\xi|\,\sin\,\delta} = 0.$$

Из вышеприведенных равенств следует, что при $|\lambda| > R$

$$\left|\int_{a_n b_n} e^{\lambda^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\lambda|x-\xi|} d\lambda\right| < \varepsilon.$$

Аналогично, доказывается справедливость неравенств

$$\left|\int_{a_n b_n} e^{\lambda^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda(1-i)|x-\xi|} d\lambda\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_{a'_n b'_n} e^{\lambda^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\lambda|x-\xi|} d\lambda\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_{a'_n b'_n} e^{\lambda^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda(1-i)|x-\xi|} d\lambda\right| < \varepsilon,$$

которые доказывают равномерную сходимость интегралов (9). Следовательно, оператор уравнения можно вносить под знак интеграла. Будем иметь:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right\} \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^2 e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^\infty P\left(x-\xi,\lambda\right)\left(F\left(x,\lambda\right) + \int_0^t e^{-\lambda^2\tau} f\left(\xi,\tau\right) d\tau\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^2 e^{\lambda^2 t} \int_0^\infty \left(\frac{d^4 P(x-\xi,\lambda)}{dx^4} + \lambda^4 P(x-\xi,\lambda) \right) F(x,\lambda)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^2 e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^\infty P(x-\xi,\lambda) \left\{ f_t(\xi,t) + \lambda^2 f(\xi,t) + \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} f(\xi,\tau)\, d\tau \right\} d\xi.$$

Согласно теореме 4, (см. [3], стр. 135), из последнего равенства следует, что функция определяемая формулой (3) удовлетворяет уравнению (1). Остается показать, что эта функция удовлетворяет и начальным условиям (2). Для этого формулу преобразуем следующим образом

$$v(x,t) = v_1(x,t,\Phi_0) + v_2(x,t,\Phi_1) + v_3(x,t,f), (3')$$

где

$$v_1(x,t,\Phi_0) = +\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^4 e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^\infty P(x-\xi,\lambda)\, \Phi_0(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

$$v_2(x,t,\Phi_1) = +\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^2 e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^\infty P(x-\xi,\lambda)\, \Phi_1(\xi)\, d\xi \tag{10}$$

$$v_3(x,t,f) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^2 e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^\infty P(x-\xi,\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} f(\xi,\tau)\, d\tau d\xi. \tag{11}$$

Теперь вводим обозначение

$$Q(x-\xi,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_s \lambda^2 e^{\lambda^2 t} P(x-\xi,\lambda)\, d\lambda, \tag{12}$$

в силу формулы (6,3,46)(см [1] стр. 307) имеем

$$\frac{\partial Q(x-\xi,t)}{\partial t} = \frac{|x-\xi|}{8i\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{i|x-\xi|^2}{4t}} - e^{\frac{i|x-\xi|^2}{4t}} \right\}, \tag{13}$$

тогда формулы (9)-(11) принимают вид

$$v_1(x,t,\Phi_0) = \int_0^\infty \frac{\partial Q(x-\xi,t)}{\partial t} \Phi_0(\xi)\, d\xi, \tag{10'}$$

$$v_2(x,t,\Phi_1) = \int_0^\infty Q(x-\xi,t)\, \Phi_1(\xi)\, d\xi, \tag{11'}$$

$$v_3(x,t,f) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty Q(x-\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{12'}$$

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1]-[4], непосредственной проверкой доказывается, что функция определяемая формулой (10') удовлетворяет однородному уравнению (1), первому начальному условию, а функция определяемая формулой (11'), также удовлетворяет однородному уравнению, соответствующее уравнению (1), второму начальному условию. А функция определяемая формулой (12'), как было отмечено выше, удовлетворяет уравнению (1) и нулевым начальным условиям.

Таким образом, доказывается теорема, аналогичная теореме 5 (см. [2] стр. 140).

Список литературы

[1] Расулов М. М. Метод контурного интеграла, Наука, Москва, 1964.

[2] Расулов М. Л. Применение метода контурного интеграла, Наука, Москва, 1975.

[3] Асадова О. Г. Применение метода контурного интеграла к решению смешанной задачи для слабопараболического уравнения 4-го порядка. Применение информационно-коммуникационных технологий в науке и образовании Баку, 16-17 сентября 2004.

[4] Асадова О. Г. Применение метода контурного интеграла к решению задачи Коши для общего волнового уравнения Кавказский Университет, II МК, Баку 01-03 ноябрь 2007, стр. 378-381.

Received 3 April 2012
Published 20 April 2012