Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 2, No 1, 2012, July
ISSN 2222-5498

Существование и единственность решений нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка

Сардарова Р.А., Заманова С.А., Алекперова И.Т., Шарифов Я.А.

Аннотация. В работе доказана теорема о существовании и единственности решений для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка при нелокальных краевых условиях. Для иллюстрации полученных результатов приведен конкретный пример.

Key Words and Phrases: Нелокальные краевые задачи, теорема о существовании и единственности, принцип сжимающих отображений Банаха, дифференциальные уравнения второго порядка

1. Введение. Постановка задачи.

Необходимость изучения краевых задач возникает при решении многих задач естествознания, техники, экономики, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Большое значение имеют вопросы существования и единственность решений краевых задач, а так же построений решений таких краевых задач для таких систем. Хотя теории краевых задач посвящено большое количество исследований, некоторые направления этой теории требуют дальнейшего развития. В частности, остаются открытыми вопросы существования и единственность решений краевых задач для некоторых классов нелинейных дифференциальных систем второго порядка. Таким образом, получение конструктивных условий разрешимости и разработка эффективных алгоритмов построения решений таких краевых задач является важней задачей.

В данной работе доказана теорема о существование и единственности решений нелокальной краевой задачи для следующего задачи

$$y'' = f\left(t, y\right), \quad t \in \left(0, 1\right), \tag{1}$$

$$A_1 y\left(0\right) + A_2 y\left(1\right) = C_1, \tag{2}$$

$$B_1 y'(0) + B_2 y'(1) = C_2, \tag{3}$$

где $y \in R^n-$состояние системы, $f : [0,1] \times R^n \to R^n$ заданная вектор функция, $A_1, A_2, B_1, B_2 \in R^{n \times n}$ заданные квадратные матрицы, причем $\det(A_1 + A_2) \neq 0$ и $\det(B_1 + B_2) \neq 0$; $C_1,\ C_2 \in R^{1 \times n}$ известные векторы. Краевые задачи такого типа встречаются в различных приложениях (см. [1,2]).

Обозначим $AC^1([0,1]; R^n)$пространство дифференцируемых функций $y : [0,1] \to R^n$ у которых первая производная y' абсолютно прерывна. Пусть $C([0,1], R^n)$ - банаховое пространство непрерывных функции на $[0,1]$ со значениями в R^n с нормой

$$\|y\| = \max_{[0,1]} |y(t)|,$$

где через $|\cdot|$обозначена евклидовая норма в R^n.
Пусть $L^1([0,1], R^n)$ банаховое пространство функций $y : [0,1] \to R^n$ интегрируемых по Лебегу с нормой

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^1 |y(t)|\, dt.$$

Предполагается функция $f : [0,1] \times R^n \to R^n$ удовлетворяет условию Каратеодори, т.е.
а) отображение $t \to f(t,u)$- измерима для любого $u \in R^n$;
б) для почти всех $t \in [0,1]$ отображение $u \to f(t,u)$ непрерывен относительно u.
Если функция $y \in AC^1((0,1); R^n)$ удовлетворяет соотношений (1)-(3), то функция $y(\cdot)$ называется решений краевой задачи (1)-(3).

2. Основные результаты.

Для доказательства основного результата сформулируем следующую вспомогательную лемму.
Лемма. Пусть $\sigma \in L^1([0,1]; R^n)$. Тогда функция

$$y(t) = \int_0^1 H(t,s)\,\sigma(s)\, ds + G_A C_1 - G_A A_2 G_B C_1 + t G_B C_2 \tag{4}$$

является единственным решением следующей краевой задачи

$$y''(t) = \sigma(t), \text{п.в.} t \in (0,1) \tag{5}$$

$$A_1 y(0) + A_2 y(1) = C_1, \tag{6}$$

$$B_1 y'(0) + B_2 y'(1) = C_2, \tag{7}$$

где

$$H(t,s) = \begin{cases} G_B B_1 t - G_A A_1 s - G_A A_2 G_B B_1, \ 0 \le s \le t \le 1 \\ -G_B B_2 t + G_A A_2 s - G_A A_2 G_B B_1, \ 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}, \tag{8}$$

$$G_A = (A_1 + A_2)^{-1}, G_B = (B_1 + B_2)^{-1}.$$

Доказательство: Пусть функция y является решением уравнение (5). Тогда

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t \sigma(s)\,ds \tag{9}$$

$$y(t) = y(0) + ty'(0) + \int_0^t (t-s)\,\sigma(s)\,ds \tag{10}$$

здесь $y'(0)$и $y(0)$ пока произвольные постоянные векторы.
Потребуем, чтобы функция$y'(t)$ определяемым равенством (9) удовлетворяет условию (7). Тогда $y'(0)$ можно определить однозначно

$$(B_1 + B_2)\,y'(0) + B_2 \int_0^1 \sigma(t)\,dt = C_1$$

Отсюда

$$y'(0) = G_B C_1 - G_B B_2 \int_0^1 \sigma(t)\,dt \tag{11}$$

Значению $y'(0)$, определяемое равенством (11) учтем в (10). Тогда

$$y(t) = y(0) + t\left(G_B C_1 - G_B B_2 \int_0^1 \sigma(s)\,ds\right) + \int_0^t (t-s)\,\sigma(s)\,ds \tag{12}$$

Теперь с помощью условий (7) определим $y(0)$ из (12).
Тогда

$$(A_1 + A_2)\,y(0) + A_2 G_B C_1 - A_2 G_B B_2 \int_0^1 \sigma(s)\,ds + A_2 \int_0^t (t-s)\,\sigma(s)\,ds = C_2$$

Отсюда

$$y(0) = G_A C_2 - G_A A_2 G_B C_1 + G_A A_2 G_B B_2 \int_0^1 \sigma(s)\,ds - G_A A_2 \int_0^1 (t-s)\,\sigma(s)\,ds \tag{13}$$

Теперь учтем (13) в (12), тогда для решения краевой задачи (5)-(7) получаем следующую формулу

$$y(0) = G_A C_2 - G_A A_2 G_B C_1 + G_A A_2 G_B B_2 \int_0^1 \sigma(s)\,ds - G_A A_2 \int_0^1 (t-s)\,\sigma(s)\,ds +$$
$$+ t\left(G_B C_1 - G_B B_2 \int_0^1 \sigma(s)\,ds\right) + \int_0^t (t-s)\,\sigma(s)\,ds.$$

Последнюю равенству можно переписать в следующем виде:

$$y(t) = G_A C_1 - G_A A_2 G_B C_1 + t G_B C_2 + \int_0^1 H(t,s)\,\sigma(s)\,ds, \tag{14}$$

где матричная функция $H(t,s)$ определяется равенством (8). Лемма доказана.
Заметим что, для всех $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$

$$\|H\| \le L,$$

где L некоторое неотрицательное число.
Теорема. Предположим, что функция f удовлетворяет условию Каратеодори, кроме того, существует $K(t) \in L^1([0,1]; R^n)$ такое, что

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \le K(t)\,|x_2 - x_1| \tag{15}$$

для любого $x_1, x_2 \in R^n,\ t \in [0,1]$.
Если

$$L\,\|K\|_{L^1} < 1, \tag{16}$$

то краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение.

Доказательство: для доказательства теоремы будем применять принцип сжимающих отображений Банаха. Для этого необходимо краевую задачу (1)–(3) привести к эквивалентному интегральному уравнению. Аналогичными рассуждениями, которое было проведена при доказательства леммы, краевую задачу (1)-(3) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$y(t) = \int_0^1 H(t,s)\,f(s,y(s))\,ds + G_A C_1 - G_A A_2 G_B C_1 + t G_B C_2. \tag{17}$$

Определим оператор $F : C([0,1]; R^n) \to C([0,1]; R^n)$ по правилу

$$F(y)(t) = \int_0^1 H(t,s)\,f(s,y(s))\,ds + G_A C_1 - G_A A_2 G_B C_1 + t G_B C_2. \tag{18}$$

Будем показывать, что оператор F определяемый равенством (18) является сжимающим. Пусть $y_1, y_2 \in C([0,1]; R^n)$ произвольные элементы. Тогда для любого $t \in [0,1]$ имеем

$$|F(y_2)(t) - F(y_1)(t)| \le \int_0^1 |H(t,s)| \cdot |f(s,y_2(s)) - f(s,y_1(s))|\,ds \le L \int_0^1 |K(t)|\,dt\,\|y_2 - y_1\|.$$

Здесь учитывая условию (15) получаем

$$\|F(y_2) - F(y_1)\| \le L\,\|K\|_{L^1} \cdot \|y_2 - y_1\|.$$

Здесь учитывая условию (16), получаем что, оператор F является сжимающим. Это означает что интегральное уравнение (17) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Пример. Пусть задана следующая краевая задача:

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' = \frac{1}{2}\sin y_2 \\ y_2'' = \frac{1}{2}\cos y_1 \end{array}\right\} t \in [0,1]\,,\ \ y_1(0) = 0,\ y_1'(1) = 0,\ y_2(1) = 0,\ y_2'(0) = 0 \qquad (19)$$

Очевидно, что в данной краевой задаче $A_1 + A_2 = E,\ B_1 + B_2 = E$.

Тогда, согласно равенству (8), матрица функция $H(t,s)$ определяется с помощью следующей равенством:

$$H(t,s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -s & 0 \\ -1 & t \end{pmatrix} & 0 \le s \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} -t & 0 \\ -1 & s \end{pmatrix} & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

Так как $\|H\| = 1,\ \|K\|_{L^1} = \frac{1}{2}$ и $L\|K\|_{L^1} = \frac{1}{2} < 1$, то краевая задача для систем дифференциальных (19) уравнений имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Benchohra, J.J. Nieto, A. Quahab, Second-order boundary value problem with integral boundary conditions. Boundary Value Problems, vol. 2011, Article ID 260309, 9 pages, 2011.

2. A. Bouncherif, Second order boundary value problems with integral boundary conditions, Nonlinear Analysis, 70, (2009), pp. 368-379.

Sardarova R.A.
Azerbaijan State Economic University, Azerbaijan, Baku

Zamanova S.A.
Azerbaijan State Economic University, Azerbaijan, Baku

Alekperova I.T.
Azerbaijan State Economic University, Azerbaijan, Baku

Sharifov Y.A.
Baku State University, Azerbaijan, Baku
Email: sharifov22@rambler.ru

Received 30 February 2012
Accepted 06 March 2012