Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 2, No 1, 2012, July
ISSN 2222-5498

Исследование спектральной задачи соответствующей смешанной задаче для уравнения колебания стерженя

Асадова О. Г., Мусаева С.З.

Аннотация. Метод контурного интеграла Расулова М.Л. [1], [2] является одним из классических методов решения смешанных задач и задачи Коши для уравнений математической физики как принадлежащих так и не принадлежащих типовой классификации по Петровскому И.Г. Существует довольно много работ посвященных исследованию таких задач ([1], [2], [3], [4]) вышеуказанным методом. Одним из этапов применяемого метода является исследование граничной задачи зависящей от параметра, называемой спектральной задачей соответствующей смешанной задаче.

Настоящая работа посвящена исследованию спектральной задачи, соответствующей смешанной задаче для уравнения колебания стерженя, целью которой является доказательство применения метода контурного интеграла к решению смешанной задачи для уравнений не принадлежащих типовой классификации по Петровскому.

Рассматривается задача нахождения решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}=f(x,t), x\in(0,1), \quad t>0 \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^k v(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=0}=\varphi_k(t), \quad \left.\frac{\partial^{k+1} v(x,t)}{\partial x^{k+1}}\right|_{x=1}=\psi_k(t) \quad t>0 \;\; (k=0,1) \tag{2}$$

и начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^s v(x,t)}{\partial t^3}\right|_{t=0}=\phi_s(x), \quad x\in(0,1), \quad (s=0,1) \tag{3}$$

где функции $f(x,t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$ $(k=0,1)$ и $\varphi_s(x)$ $(s=0,1)$ являются достаточно гладкими функциями своих аргументов при $x\in(0,1)$ и $t>0$

По схеме метода контурного интеграла, применяя к обеим частям уравнения (1) и граничных условий (2) интегральный оператор

$$I[f] = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} f(t)dt \tag{4}$$

и учитывая начальные условия (3) получим следующую граничную задачу, зависящую от параметра, называемую спектральной задачей, т.е. задачу для уравнения a S бесконечный разомкнутый контур целиком расположенный в R_δ определяемого

$$y^{IV} + \lambda^4 y = F(x,\lambda), \quad x \in (0,1) \tag{5}$$

с граничными условиями

$$y^{(k)}(0,\lambda) = \tilde{\varphi}_k(\lambda); \quad y^{(k+1)}(1,\lambda) = \tilde{\psi}_k(\lambda), \quad (k=0,1) \tag{6}$$

где

$$F(x,\lambda) = \phi_1(x) + \lambda^2\phi_0(x) + \tilde{f}(x,\lambda), \tag{7}$$

причем

$$y(x,\lambda) = \int_0^t e^{-\lambda^2 t} v(x,t)dt,$$

$$\tilde{\varphi}_k(\lambda) = \int_0^t e^{-\lambda^2 t}\varphi_k(t)dt, \quad (k=0,1)$$

$$\tilde{\psi}_k(\lambda) = \int_0^t e^{-\lambda^2 t}\psi_k(t)dt, \quad (k=0,1).$$

Принимая во внимание, что решение неоднородного уравнения (5) удовлетворяющее однородным граничным условиям строится с помощью функции Грина, то в этой работе исследуется задача для однородного уравнения, соответствующего уравнению (5), т.е.

$$y^{IV} + \lambda^4 y = 0, \tag{5$'$}$$

с граничными условиями (6).

Решение задачи (5′), (6) ищется в виде суммы потенциалов

$$y(x,\lambda) = \sum_{m=1}^4 K_m(x,\lambda)\mu_m(\lambda), \tag{8}$$

где $\mu_m(\lambda)$ $(m=\overline{1,4})$ неизвестные плотности, подлежащие определению, а $K_m(x,\lambda)$ $(m=\overline{1,4})$ ядра потенциалов, которые определяются формулами

$$K_1(x,\lambda)=P(x-\xi,\lambda)|_{\xi=0}\,,\quad K_2(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial P(x-\xi,\lambda)}{\partial x}\bigg|_{\xi=0},$$

$$K_3(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 P(x-\xi,\lambda)}{\partial x^2}\bigg|_{\xi=1},\quad K_4(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial^3 P(x-\xi,\lambda)}{\partial x^3}\bigg|_{x=1},$$

причем $P(x-\xi,\lambda)$ является фундаментальным решением уравнения (5) и определяется формулой

$$P(x-\xi,\lambda)=-\frac{\sqrt{2}}{8\lambda^3}\left\{(1-i)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda(1+i)|x-\xi|}-(1+i)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\lambda|x-\xi|}\right\}, \tag{9}$$

Непосредственной проверкой доказывается, что для $P(x-\xi,\lambda)$ и его производных имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^3 P(x-\xi,\lambda)}{\partial x^s}\right|\le\frac{ce^{-\varepsilon|\lambda||x-\xi|}}{|\lambda|^{3-s}},\quad (s=\overline{0,3})$$

справедливые при всех значениях параметра $\lambda\in R_\delta$, где

$$R_\delta=\left\{\lambda:|\lambda|>R,\ \frac{\pi}{4}+\delta<arg\lambda<\frac{\pi}{2}-\delta\right\}$$

Теперь подставляя (8) в граничных условиях (6) для определения неизвестных плотностей получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{m=1}^{4}K_m(0,\lambda)\mu_m(\lambda)=\tilde{\varphi}_0(\lambda)\\ \sum\limits_{m=1}^{4}K'_m(0,\lambda)\mu_m(\lambda)=\tilde{\varphi}_1(\lambda)\\ \sum\limits_{m=1}^{4}K'_m(1,\lambda)\mu_m(\lambda)=\tilde{\psi}_0(\lambda),\\ \sum\limits_{m=1}^{4}K''_m(1,\lambda)\mu_m(\lambda)=\tilde{\psi}_1(\lambda).\end{array}\right\} \tag{10}$$

Непосредственной проверкой доказывается, что определитель системы (10) отличен от нуля при всех $\lambda\in R_\delta$, т.к. нули определителя системы лежат на биссектрисе второй и четвертой четверти комплексной плоскости. Следовательно, система алгебраических уравнений (10) имеет единственное решение $\mu_m(\lambda)$ $(m=\overline{1,4})$, которые ограничены при $|\lambda|\to\infty$ и аналитичны при всех $\lambda\in R_\delta$. Таким образом доказывается

Теорема. Если функции, $\varphi_k(t)$ $\psi_k(t)$ и $(k=0,1)$ являются оригиналами в смысле [2] кроме того $\varphi_k(t)$ $(k=0,1)$ имеет непрерывные производные до $2-k$-го, а $\psi_k(t)$ $(k=0,1)$ до $(1-k)$-го порядка, то задача $(5')$, (6) имеет единственное аналитическое по λ в R_δ решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде суммы потенциалов (9), плотности $\mu_m(\lambda)$ $(m = \overline{1,4})$ которых являются аналитическими ограниченными функциями по λ в R_δ функциями. Что касается решения задачи для неоднородного уравнения (5) с однородными граничными условиями, как это отмечено выше, строится с помощью функции Грина, т.е.

$$y(x, \lambda; F) = \int\limits_0^1 G(x, \xi, \lambda) F(\xi, \lambda) d\xi, \tag{11}$$

где $G(x, \xi, \lambda) = P(x - \xi, \lambda) - Q(x, \xi, \lambda)$, причем $P(x - \xi, \lambda)$ фундаментальное решение, а $Q(x, \xi, \lambda)$ регулярная часть функции Грина. В силу свойства функции Грина получается, что $Q(x, \xi, \lambda)$ является решением уравнения $(5')$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{d^k Q(x, \xi, \lambda)}{dx^k}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^k P(x, -\xi, \lambda)}{dx^k}\right|_{x=0}, \quad (k = 0, 1),$$

$$\left.\frac{d^{k+1} Q(x, \xi, \lambda)}{dx^{k+1}}\right|_{x=1} = \left.\frac{d^{k+1} P(x - \xi, \lambda)}{dx^{k+1}}\right|_{x=1} \quad (k = 0, 1). \tag{12}$$

Как это сказано выше, решение задачи $(5')$, (14) ищется в виде суммы потенциалов (9), плотности $\nu_k(\xi, \lambda)$ $(k = \overline{1,4})$, которых будут решением системы алгебраических уравнений (10) с правыми частями (12)

Таким образом, доказывается существование и единственность аналитического по λ в R_δ решения спектральной задачи (5), (6) соответствующей смешанной задаче (1) - (3), которое представляется в виде суммы решений задач $(5')$, (6) и (5) с однородными граничными условиями, т.е.

$$Y(x, \lambda; F; \varphi) = Y_1(x, \lambda) + Y_2(x, \lambda; F),$$

где $Y_1(x, \lambda)$ решение задачи $(5')$, (6) а $Y_2(x, \lambda; F)$ решение задачи (5) с однородными граничными условиями соответствующими условиями (6).

Список литературы

[1] Расулов М. М. Метод контурного интеграла, Наука, Москва, 1964.

[2] Расулов М. Л. Применение метода контурного интеграла, Наука, Москва, 1975.

[3] Асадова О. Г. Применение метода контурного интеграла к решению смешанной задачи для слабо-параболического уравнения, Мат. НК "Методы математической физики"посвященной 90 летию акад. Расулова М.Л., стр.40.

[4] Asadova O. G., Aliev N.A.Investigation of a boundary value problem for a higher order equation, Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, XXXI, N 1, p.25.

Асадова О. Г.
Бакинский Государственный Университет
Мусаева С.З.
Азербайджанский Университет Языков, кафедра математики и информатики

Received 6 June 2012
Accepted 30 June 2012